Title: Modele otoczeniowe i topologiczne dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych

Author: Tomasz Witczak

Citation style: Witczak Tomasz. (2020). Modele otoczeniowe i topologiczne dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych

Instytut Matematyki

Modele otoczeniowe i topologiczne dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych

Rozprawa doktorska

Autor:
Tomasz Witczak

Promotor:
dr hab. Tomasz Połacik, prof. UŚ

Katowice, 2020

SPIS TREŚCI

0. Wprowadzenie

0.1. **Plan rozprawy.** Niniejsza praca jest plonem badań prowadzonych przez autora w czasie studiów doktoranckich w Zakładzie Logiki Instytutu Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach - począwszy od października roku 2014. Rozprawa dzieli się, jeżeli pominąć niniejsze wprowadzenie, na sześć głównych *części*, a te na *rozdziały* i *podrozdziały*.

W części pierwszej badane są semantyki otoczeniowe i bi-relacyjne dla pewnych (normalnych) intuicjonistycznych logik modalnych [1]. Części druga i trzecia nadal dotyczą modalnego intuicjonizmu. W części czwartej analizujemy perspektywy wykorzystania tzw. uogólnionych topologii (w sensie Császára) jako struktur semantycznych dla słabych logik modalnych, przede wszystkim klasycznych (aczkolwiek na marginesie rozważamy także systemy subintuicjonistyczne). W części piątej budujemy modele oparte na tzw. infra-topologiach, uprzednio porządkując pewne podstawowe terminy z nimi związane. Część szósta ma w zasadzie charakter dodatku do czwartej: przedstawiamy w niej pewne rezultaty o charakterze czysto topologicznym, dotyczące tzw. $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur (traktowanych uprzednio jako modele logiczne).

Przyjrzyjmy się tym częściom bliżej. Pierwsza oparta jest na niepublikowanej pracy [144], dostępnej w repozytorium arxiv.org. Wychodzimy tu przede wszystkim od artykułu Moniri i Maleki [90] i modyfikujemy wprowadzoną przez ten duet semantykę otoczeniową dla intuicjonizmu. Robimy to w taki sposób, by modyfikacja była możliwie prosta, a jednocześnie otwierała drzwi do nowych rozważań. W ramach tych rozważań wprowadzamy pewną modalność (mianowicie intuicjonistyczny odpowiednik konieczności). Okazuje się, że otrzymana semantyka odpowiada intuicjonistycznej logice modalnej z aksjomatami K i T. Dowodzimy pełności bezpośrednio i pośrednio, tj. poprzez pokazanie równoważności naszych struktur z tymi, które zaprezentowane zostały uprzednio w pracy [12] Božića i Došena. Dowodzimy własności skończonego modelu (poprzez filtrację) i tymczasowo wprowadzamy operator możliwości - w taki sposób, by obie modalności były niezależne, tj. wzajemnie niedefiniowalne (co pokazujemy na odpowiednich kontrprzykładach). Pokazujemy też translację pomiędzy $\mathbf{iKT}_{\Box}$ (lub rozszerzeniami tego systemu) a pewnymi systemami klasycznie modalnymi, wyposażonymi wszelako w dwa operatory konieczności. Rozważamy także zagadnienie *public announcement* w kontekście naszego systemu. Dość istotnym fragmentem tej partii pracy jest technicznie złożone twierdzenie o warstwowej bisymulacji, będące adaptacją analogicznego twierdzenia z pracy [90], wszelako w środowisku modalnym (co wymaga zdiagnozowania kilku znamiennych niuansów).

W części drugiej prezentujemy pewne rozważania topologiczne: udaje się nam osiągnąć punktowo równoważne przejścia (co prawda za każdym razem tylko w jedną stronę) pomiędzy wariantami semantyk otoczeniowych i pewnymi modelami topologicznymi. W najogólniejszej wersji są to nawet modele *multi-topologiczne*, co oznacza tutaj nie tyle "wiele topologii na jednym uniwersum", ile raczej "wiele uniwersów z własnymi topologiami". W praktyce jednak użyteczne okazuje się zawężenie rozważań do topologii indukowanych przez pewną wyjściową rodzinę. Rozdział ten bazuje na pracy [148], opublikowanej na łamach "Bulletin of the Section of Logic".

Część trzecia zaczyna się od omówienia tzw. logik fałszywych wierzeń, przy pomocy których modeluje się sytuacje, w których formuła φ jest fałszywa (w danym świecie), ale i tak się w nią (błędnie) wierzy. Prezentujemy także inną interpretację

[1] Praca odnosi się jedynie do logik *zdaniowych*: w dalszym ciągu będzie to nasze domyślne założenie.

modalności określonej w tego typu systemach. Mianowicie można sądzić, że odrzucamy formułę w naszym świecie, chociaż jest nam ona zalecana. Później analizujemy inne operatory, semantyki i systemy, przy czym jeden z nich związać można z tzw. logikami nieznanych prawd. W ogólności (oraz z technicznego punktu widzenia) rozważania tej części dotyczą słabych logik modalnych opartych o intuicjonizm (co w naturalny sposób pozwala myśleć o pewnego rodzaju hierarchii przekazu informacji i sugestii). Modele mają charakter relacyjno-otoczeniowy. Omawiamy też modele bi-otoczeniowe z prac [33] i [34]. Część ta zawiera poza tym wzmiankę na temat perspektyw połączenia otoczeń z operatorami probabilistycznymi i miarą zadaną na uniwersum modelu.

W części czwartej zaczynamy od przeglądu wybranych uogólnień lub modyfikacji pojęcia *topologii*, istniejących w literaturze. Przedstawiamy motywacje autorów i ich główne pomysły. Naszą uwagę ostatecznie koncentrujemy na koncepcji wprowadzonej przez Császára w [30] i następnie badanej przez licznych matematyków. Budujemy modele oparte na tzw. silnej uogólnionej topologii i pokazujemy ich równoważność z pewną klasą modeli otoczeniowych, przez co pośrednio dowodzimy pełności naszych struktur względem logiki **MNT4**. Następnie uogólniamy naszą semantykę do poziomu tzw. $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur, w odniesieniu do których osiągamy pewne częściowe rezultaty, jeśli chodzi o aksjomatyzację. To, że są one częściowe, oznacza, że pełność odnosi się albo do pewnych podklas, albo do struktur różnych, choć w ogólnym zamyśle podobnych (mamy tu na myśli np. $\mathbf{GTf}$-struktury). W szczególności $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktury, w których punktom spoza maksymalnego zbioru otwartego nie przypisuje się *żadnych* otoczeń przez funkcję $\mathcal{F}$ (tzn. przypisuje się im rodziny puste), odpowiadają logice **MT4** i można je interpretować w kontekście teorii światów niemożliwych (o ile zgodzimy się, by nasza topologia była domknięta na skończone przekroje, co pozwoli nam zaakceptować aksjomat K, ale nie regułę RN). Wprowadzamy też trzy warianty pojęcia bisymulacji, przy czym jeden z nich działa poprawnie wtedy, gdy odpowiednio zmienimy sposób rozumienia operatora modalnego.

W części przedostatniej, piątej, adaptujemy jedną z wcześniej zaprezentowanych koncepcji (mianowicie uogólnione modele topologiczno-otoczeniowe z funkcją $\mathbf{f}$) do nowego środowiska, jakim są infra-topologie. Przy okazji pokazujemy pewne podstawowe fakty na temat tych struktur i wyróżniamy dwie specjalne klasy zbiorów (pseudo-infra-otwarte oraz i-poprawne), a także ich odpowiedniki wyrażone w terminologii domknięć. Rozważamy (wstępnie) możliwość wykorzystania tych klas przy redefiniowaniu pojęcia gęstości. Zajmujemy się także *minimalnymi* zbiorami infra-otwartymi.

Na koniec, tj. w części szóstej, wracamy do $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur. Zauważyliśmy, że w bardzo naturalny sposób można w owych strukturach zdefiniować pojęcia będące słabymi odpowiednikami pewnych terminów topologicznych (przede wszystkim mowa tu o wnętrzu i domknięciu), a to łatwo nasuwa myśl o dalszych dociekaniach (np. o badaniu ciągów uogólnionych). Rozważania te potraktowaliśmy jako dodatek - i wypełniają one szósty rozdział. Materiał tutaj zawarty w znacznej mierze pochodzi z pracy [142], która ukazała się na łamach Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica.

0.2. **Motywacja i tok rozumowania.** Przed każdym matematykiem stawia się zawsze pytanie o *motywację* stojącą za jego dociekaniami. W zasadzie jest to pytanie zrozumiałe, aczkolwiek trzeba pamiętać, ze w ostateczności każde uzasadnienie dla wyboru takiej, a nie innej tematyki, bazuje na podstawach, które również domagają się usprawiedliwienia. Ten ciąg argumentacyjny może być prowadzony bardzo długo. Teoretycznie granicą powinny być pewne intuicyjnie jasne i powszechnie przyjęte przeświadczenia co do tego, które zagadnienia są *interesujące* lub mają *praktyczne* *zastosowanie* (przy czym zastosowanie to nieraz odnosi się tak naprawdę do innych zagadnień teoretycznych, niekoniecznie zaś do tzw. codziennego życia, nawet jeśli rozpatrywać to życie przez pryzmat dyscyplin takich jak ekonomia, socjologia czy filozofia prawa). Problem polega na tym, że tak naprawdę przeświadczenia te rzadko kiedy mają status autentycznego konsensusu - i nieraz wkrada się do nich pewien subiektywizm.

Mimo tych trudności uważamy naszą motywację za dobrze sformułowaną i przekonującą. Naszym absolutnym punktem wyjścia, który pozwolimy tu sobie przyjąć jako pewnik, jest pogląd, iż badanie semantyki nieklasycznych systemów logicznych *jest* wartościowe i pożyteczne. To oczywiście bardzo ogólna uwaga, należy ją więc doprecyzować. W gruncie rzeczy będziemy to stopniowo robić w trakcie naszych dalszych rozważań, tym niemniej wypada już teraz zauważyć pewne fakty. Na przykład pojęcia topologiczne (być może uogólnione lub zmienione w pewien sposób) stanowią naturalny łącznik pomiędzy logiką a przestrzeniami badanymi w teorii miary czy analizie. Z kolei otoczenia są interesującą semantyką dla logik modalnych, w których $\Box$ spełnia jedynie (bardzo) słabe aksjomaty. Te zaś logiki budzą zainteresowanie zarówno dlatego, że nieraz wymagają stosowania dość subtelnych technik (w celu wypracowania np. rezultatów pełnościowych), jak i z powodu pewnych specyficznych interpretacji poza-matematycznych (por. [101]). Co więcej, zdają się być powiązane z nie-modalnymi systemami subintuicjonistycznymi.

Zazwyczaj w naszych dociekaniach wychodziliśmy od namysłu nad pewnymi znanymi już obiektami (takimi jak modele otoczeniowe, relacyjne czy topologiczne). Namysł ten zasadzał się na pytaniach, które w naszej ocenie jawią się jako bardzo naturalne - a następnie na formułowaniu możliwie naturalnych odpowiedzi. Oczywiście pojęcie *naturalności* też jest wieloznaczne. Spróbujemy więc przybliżyć rzecz poprzez egzemplifikację.

Pierwszy przykład to semantyka otoczeniowa dla zdaniowej logiki intuicjonistycznej, zaproponowana przez Moniri i Maleki w [90]. Otóż jeśli autorzy ci w swoich twierdzeniach (w szczególności tych, które dotyczą transformacji pomiędzy modelami otoczeniowymi a relacyjnymi i topologicznymi) wymownie odwołują się do aksjomatu nadzbioru (tj. do założenia, że każdy nadzbiór otoczenia punktu też jest jego otoczeniem), to za zupełnie naturalny uważamy następujący ciąg pytań: **i**) co stanie się, gdy zrezygnujemy z tego charakterystycznego warunku?; **ii**) czy w ten sposób pojawi się możliwość wydefiniowania nowych operatorów (np. modalności lub dodatkowej implikacji)?; **iii**) jaką logikę będzie wyznaczać otrzymana w ten sposób semantyka?; **iv**) czy i ew. *jakim* strukturom innego typu, np. relacyjnym lub bi-relacyjnym, będą odpowiadać nasze modele?

Drugi przykład to znów semantyka otoczeniowa, ale w kontekście słabych logik modalnych bazujących na intuicjonizmie. Jeżeli bowiem modele otoczeniowe dla intuicjonistycznych logik normalnych są równoważne modelom bi-relacyjnym, nierzadko już badanym, to zrozumiałe staje się podejrzenie, że modele relacyjno-otoczeniowe (w których relacją jest częściowy porządek, odpowiadający za aspekt intuicjonistyczny) będą narzędziem *specyficznym* dla takich systemów, w których intuicjonizm (a być może jakiś subintuicjonizm) zostanie wyposażony jedynie w bardzo podstawowe reguły modalne (bez K i RN).

Przykład trzeci to uogólnione (w różny sposób) topologie. Wiadomo, że modele topologiczne są powszechnie wykorzystywane w badaniach nad semantyką klasycznych logik modalnych oraz systemów (super)intuicjonistycznych. Z drugiej strony, istnieją liczne generalizacje standardowej definicji przestrzeni topologicznej. Wśród nich prym wiedzie prawdopodobnie koncepcja Császára, wokół której zbudowano już dość solidną teorię. Na przykład zdefiniowano i zbadano uogólnione odpowiedniki takich pojęć jak otwartość, domkniętość, gęstość, nigdziegęstość czy zwartość;

bada się aksjomaty oddzielania, funkcje ciągłe i grupy topologiczne. W tym kontekście za naturalne uważamy pytanie o to, czy również i tak pojęta topologia może znaleźć zastosowanie w pracy nad logiką? A jeżeli może, to jakie własności będą mieć modele i jakich systemów aksjomatycznych będą dotyczyć nasze rozważania? Pytania te są szczególnie ważne w świetle faktu, że o semantyce topologicznej w ścisłym sensie możemy mówić głównie lub wręcz jedynie w odniesieniu do dość mocnych logik (od **S4** wzwyż).

Truizmem będzie stwierdzenie, że semantyka i syntaktyka są we współczesnej logice matematycznej zgoła nierozerwalnie związane. Tym niemniej wielu autorów lokuje się bardziej po jednej lub drugiej stronie: i dla zrozumienia ich toku myślenia, ich inspiracji i skojarzeń, może być istotne to, czy chodziło im przede wszystkim o badanie pewnych systemów dedukcyjnych (ewentualnie przy pomocy takich modeli, jakie były do tego celu przydatne) - czy raczej o analizowanie struktur (otoczeniowych, topologicznych etc.), przy założeniu, że byłoby wskazane powiązanie ich z jakimiś logikami. My reprezentujemy raczej to drugie podejście: punktem wyjścia zwykle jest dla nas pewna koncepcja semantyczna (uniwersum z określonymi funkcjami pomocniczymi, wartościowaniem zmiennych i regułami wymuszania formuł). Jeżeli chodzi o teorię dowodu *vel* syntaktykę, to koncentrujemy się raczej na przejrzystych aksjomatykach w stylu hilbertowskim, a nie np. na rachunku sekwentów.

Celem naszej pracy jest otwarcie pewnych nowych dróg w badaniach nad: **i)** semantykami otoczeniowymi, relacyjnymi i topologicznymi dla logik zdaniowych; **ii)** rozmaitymi uogólnieniami przestrzeni topologicznych. Chociaż więc rozprawa nasza nie zmierza ku jakiemuś "ostatecznemu twierdzeniu", które byłoby zwieńczeniem i usprawiedliwieniem wszystkich wcześniejszych rozważań, to jednak uważamy, że jest ona spójna: w tym sensie, że wszystkie rozdziały zamykają się w jednej tematyce, wyznaczanej przez zagadnienia takie jak modalność, możliwe światy oraz otoczenia i topologie. Wszystko to w kontekście logik nieklasycznych. Poszczególne rozdziały są zresztą ze sobą związane, zwłaszcza pierwszy z drugim (i poniekąd trzecim) czy czwarty z piątym i szóstym. Ostateczna ocena naszych wysiłków należy oczywiście do czytelnika.

0.3. **Wkład własny i istniejące fundamenty.** Początkowo zakładaliśmy, że rozprawa będzie wyposażona, jak to się czasami praktykuje, w rozbudowany rozdział wstępny, zawierający wszystkie podstawowe fakty na temat logik modalnych i super- oraz subintuicjonistycznych, przynajmniej w odniesieniu do zagadnień semantycznych. Oznaczałoby to *de facto*, że rozdział ów byłby czymś w rodzaju skryptu prezentującego pojęcia takie jak dowód, reguła, pełność semantyczna, rozstrzygalność, model Kripkego, algebra Heytinga, logiki normalne, logiki Lewisa czy struktura otoczeniowa; wraz z głównymi twierdzeniami (być może bez dowodów). Ostatecznie jednak zrezygnowaliśmy z tego pomysłu. Pierwszy powód jest taki, że praca zasadniczo kierowana jest do czytelnika (dobrze) zaznajomionego z tematyką logiki formalnej. Druga przyczyna to fakt, że praca nie jest i nie ma być systematycznym, całościowym przeglądem zagadnień takich jak np. intuicjonistyczne logiki modalne czy topologie Császára. Chodzi raczej o prezentację i analizę kilku szczegółowych kwestii. Rzecz jasna kwestie te odmalowywane są na pewnym tle - i to tło będzie prezentowane, tyle że raczej na bieżąco i w miarę potrzeby, w relacji do konkretnych problemów.

Wszystkie definicje i twierdzenia, o ile nie stwierdzono inaczej [2] są naszymi własnymi. Na ogół (zwłaszcza w przypadku $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur) oznacza to również, że są one nie tylko w formie, ale i w treści *nowe*. Niekiedy jednak (zwłaszcza w przypadku

[2] Tudzież z dokładnością do naszej nieuchronnej niedoskonałości. Deklaracje takie jak ta, do której się tu odnosimy, należy domyślnie opatrywać zastrzeżeniem o treści: "Dołożyliśmy wszelkich starań..." lub "Wedle wszelkiej naszej wiedzy...".

logiki $\mathbf{iKT}_{\Box}$ i modeli otoczeniowych dla niej) są one *nasze* w tym sensie, iż przez nas wprowadzone lub dowiedzione (niezależnie od innych badaczy); natomiast analogiczne wyniki mogą już funkcjonować, tyle że np. osiągnięte innymi metodami lub wyrażone inną terminologią. Dla przykładu: pełności silnych uogólnionych modeli topologicznych względem logiki **MNT4** dowodzimy poprzez pokazanie ich punktowej równoważności z pewną klasą modeli otoczeniowych - gdy np. w [62] wynik ten uzyskano *explicite*, przy pomocy modeli kanonicznych. Inne przykłady to własność skończonego modelu dla $\mathbf{iKT}_{\Box}$ (pokazana w pracy Sotirova [125]) czy wspomniane już klasyczne (w sensie modalnym) odpowiedniki tego systemu (rozpoznane również przez Božica i Došena). Nie możemy też wykluczyć, że niektóre bardzo szczegółowe, matematycznie proste, a jednocześnie żmudne w analizie zależności były już klasyfikowane w źródłach.

Zdecydowaliśmy się pozostawić takie partie materiału, ponieważ czytelnik - jak wierzymy - łatwo zauważy, że wyracowaliśmy te wyniki niezależnie. Raz jeszcze zwracamy uwagę na fakt, że (w przeciwieństwie do wielu wzmiankowanych autorów, którzy wychodzili od koncepcji *badania systemów logicznych*, m.in. przy pomocy modeli) dla nas punktem wyjścia niemal zawsze była semantyka (droga "od struktur do formuł"). Z tego powodu niektóre rezultaty niejako *objawiły się* dopiero w trakcie badań i z początku nie były bynajmniej oczywiste - albo nie było oczywiste to, że znajdują się już w (nader przecież rozbudowanej) literaturze. Możemy jedynie winszować sobie w pełni samodzielnego dojścia do twierdzeń i pojęć, które uprzednio rozpoznali inni matematycy, niewątpliwie wysokiej klasy. W każdym razie tego rodzaju sytuacje będą zazwyczaj sygnalizowane.

Zaznaczmy też, że pojawi się kilka twierdzeń, które można zaliczyć do folkloru matematycznego, jak np. twierdzenie Lindenbauma o rozszerzaniu teorii do teorii (relatywnie) maksymalnych czy semantyczny odpowiednik twierdzenia o dedukcji. Wówczas nie podajemy źródeł ani nie rościmy sobie pretensji do oryginalności (chyba że rozważany jest jakiś szczególny, nieoczywisty wariant takiej tezy, np. subintuicjonistyczny).

0.4. **Notacja i pojęciowość.** Symbolika i terminologia matematyczna jest raczej standardowa, a w razie potrzeby formalnie wprowadzana i precyzowana. Tutaj wyszczególnimy jedynie kilka podstawowych spraw.

W rozprawie rozważa się modele kilku rodzajów i dlatego warto zaznaczyć, że pojęć "model relacyjny" i "model Kripkego" używamy jako synonimów; podobnie z triadą "logika", "system", "rachunek" (przynajmniej w kontekstach takich jak "system **S4**"). Tam, gdzie w języku angielskim mówi się o "frame'ach", tam my zazwyczaj używamy słowa "struktura" (aczkolwiek od czasu do czasu stosujemy również wspomniany termin angielski, zapisując go kursywą). Formuły w światach modelu są "wymuszane", "akceptowane", "forsowane", rzadziej "zachodzą" lub są "spełnione".

Czasami będziemy używać angielskiego słówka "framework", dla którego co prawda dałoby się znaleźć pewne polskie wyrazy bliskoznaczne, ale które ma też swoją specyfikę: dla nas użyteczną przez swą ogólność. Będziemy zatem mówić o *frameworku* tam, gdzie nie będzie koniecznie chodziło o konkretną klasę obiektów matematycznych, albo nie tylko o nią, a raczej o pewien kierunek myślenia czy naturalne intuicje. Na przykład "*framework* klasyczny" czy "*framework* subintuicjonistyczny".

Przez "słabe logiki modalne" rozumiemy wszystkie te klasyczne logiki modalne, które nie są normalne, tj. nie zawierają aksjomatu *K lub* nie są domknięte na regułę konieczności. Przez "logiki superintuicjonistyczne" rozumiemy wszystkie różne od zera elementy tej kraty logik (w języku bez modalności), której zerem jest intuicjonizm, a jedynką logika klasyczna. Systemy, dla których intuicjonizm jest nadzbiorem (właściwym), nazywamy subintuicjonistycznymi.

Używać będziemy często terminu *prime*-teoria, który (jako zbitka polsko-angielska) może nieco razić, ale jest krótszy niż np. "teoria relatywnie maksymalna", a zarazem nie generuje takich potencjalnych nieporozumień jak "teoria pierwsza" (wyobraźmy sobie, że mówimy o kilku teoriach pierwszych: pierwszej, drugiej, itd.). Na podobnej zasadzie w ostatniej części pracy pojawi się słówko *gnet* (od *generalized net*).

"Pełność" domyślnie będzie oznaczać dla nas silną pełność, tj. sytuację, w której konsekwencja semantyczna pokrywa się z syntaktyczną.

W częściach czwartej i szóstej będziemy czasami dla prostoty używać terminów takich jak "topologia" czy "zbiór otwarty", mając w rzeczywistości na myśli topologię uogólnioną (chyba że kontekst będzie wymuszał precyzyjne rozróżnienie). Podobnie przy braku ryzyka nieporozumienia będziemy niekiedy pisać o "modelu", nie dopowiadając, że mamy na myśli model z konkretnej klasy, np. **in1**-model.

Z drugiej strony, przestrzenie topologiczne będziemy w takich sytuacjach nazywać dodatkowo "standardowymi" lub "zwyczajnymi".

Terminów matematycznych będziemy najczęściej używać dopiero po ich formalnym określeniu. We wprowadzeniach do rozdziałów i podrozdziałów czynimy jednak często wyjątek dla pojęć najbardziej znanych (jak "wymuszanie formuł", "punktowa równoważność", "prawdziwość w modelu" czy "pełność"), acz te mniej oczywiste zawsze są potem ściśle definiowane.

W zasadzie w każdym modelu (a nawet w strukturach nie będących modelami lecz po prostu przestrzeniami, np. topologicznymi) oznaczamy uniwersum literą W (ew. z indeksem, jeśli pracujemy z więcej niż jedną strukturą). Elementy uniwersum nazywamy "światami" lub (synonimicznie w przypadku rozważań logicznych) "punktami" i oznaczamy je literami $w, u, v, z, s, ...$, a także $a, b, c, d, e, ...$ (ew. z indeksami liczbowymi). Należy zaznaczyć, że te oznaczenia stosowane są także tam, gdzie nasze struktury rozważamy niezależnie od logiki; co więcej, są one przyjęte również w modelach kanonicznych. Naszym zdaniem taka jednolitość ułatwia zrozumienie wywodu bardziej niż np. używanie $X, Y, x, y, z, ...$ w dywagacjach czysto topologicznych, $W, U, w, v, u...$ w ogólnologicznych, a $W_{\mathbf{L}}, U_{\mathbf{L}}, \Gamma, \Delta, \Pi$ w odniesieniu do teorii maksymalnych.

Zmienne zdaniowe to $p, q, r, ...$, formuły oznaczamy greckimi małymi literami. Zwykle są to φ, ψ, γ, rzadziej α, β, δ lub inne. Symbol $\vdash$ oznacza wynikanie syntaktyczne, $\Vdash$ wyraża wymuszanie formuły w świecie, $\models$ odnosi się do prawdziwości w modelu i konsekwencji semantycznej.

Symboli $\Rightarrow, \Leftarrow$ i $\Leftrightarrow$ używamy jedynie na poziomie (klasycznego) meta-języka. Podobnie ma się rzecz z kwantyfikatorami $\forall$ i $\exists$ (tu małym wyjątkiem jest dygresja na temat logik wiarygodności, które w swej podstawowej postaci są systemami pierwszego rzędu).

W pracy rozważane będą bardzo różne rozumienia modalności (różne, choć zwykle nawiązujące w jakiś sposób do intuicji związanych z pojęciem konieczności). Zasadniczo dla każdej interpretacji będziemy przyjmować odrębny symbol, aczkolwiek tylko w takiej partii tekstu, w jakiej będzie to konieczne dla klarowności przekazu. Zakładamy więc, iż dla czytelnika będzie jasne, że np. $\Box$ w modelu otoczeniowym dla $\mathbf{iKT}_{\Box}$ to co innego (coś inaczej interpretowanego) niż $\Box$ dla $\mathbf{iT}_{\Box}$ czy $\Box$ w kontekście uogólnionych topologii. Również $\bullet$ jest używany w dwóch miejscach (w odmiennych znaczeniach). Uznaliśmy, że to lepsze niż mnożenie (ekstrawaganckich być może) symboli ponad miarę.

Pracować będziemy z kilkunastoma aksjomatami i regułami (w domyśle: *schematami* aksjomatów). Duża część z nich to dobrze znane aksjomaty logiki modalnej, jak np. T , K czy M albo reguła konieczności RN czy reguła ekstensjonalności RE . Otóż będziemy zakładać, że standardowe ich oznaczenia odnoszą się do operatora $\Box$. Jeżeli w indeksie dolnym pojawi się symbol innego operatora, to należy rozumieć, że mówimy o odpowiedniku wyjściowego aksjomatu dla tej właśnie modalności. Na przykład $T_{\blacksquare}$ oznaczać będzie $\blacksquare\varphi \to \varphi$, a $RN_{\circ}$ - regułę postaci $\varphi \vdash \circ\varphi$. Zarazem jednak T to po prostu $\Box\varphi \to \varphi$.

Nasze tezy stawiamy w formie *twierdzeń* i *lematów*. Poza tym stosujemy *definicje*. W tych formach ujęta jest większość ściśle określonych pojęć i prawidłowości. Kwestie poboczne, wszelkiego rodzaju wprowadzenia i komentarze, jak również rzeczy łatwe do zauważenia, ujmowane są w ciągłym tekście lub ewentualnie w *uwagach*. Na ogół wydzielane są też *przykłady*. Wydzielamy również *dygresje*. To te fragmenty materiału, które nie dotyczą bezpośrednio głównej tematyki pracy oraz są zbyt luźno zarysowane, by nadawać im rangę osobnych (pod)rozdziałów. Zarazem są one - mimo wszystko - na tyle rozbudowane, że nie byłoby właściwe umieszczanie ich w tekście ciągłym, bez żadnego wyróżnienia.

Staraliśmy się, by praca była zwięzła, ale nie za cenę nieporozumień. Prowadzimy zatem wywód tak, by nie ograniczać się jedynie do prezentacji formalnie opracowanego materiału, ale przedstawiać również nasze intuicje, pomysły i przypuszczenia (zwłaszcza w dygresjach). Nie chcieliśmy, by rozprawa stanowiła jedynie skondensowany ciąg w pełni sformalizowanych definicji i twierdzeń. Sporadycznie sięgamy nawet po pewne nieformalne porównania i wyrażenia (tam, gdzie mogą one ułatwić czytelnikowi zrozumienie naszych koncepcji), zaznaczając jednak, że nie nadajemy im rangi równej dowodom i definicjom. Zresztą wszystkie nasze *stricte* matematyczne wyniki są wyrażane precyzyjnie i symbolicznie.

0.5. **Publikacje autora.** Do dnia złożenia rozprawy do recenzji, autor opublikował[3] następujące artykuły naukowe:

(1) T. Witczak, *Generalized topologies with associating function and logical applications*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, Vol. 24, Number 2, December 2020.
(2) T. Witczak, *Propositional logic with probability operators (based on general ideas of weak modal calculus)*, w: *Reasoning: games, cognition, logic*, red. M. Urbański, T. Skura, P. Łupkowski, w serii *Studies in Logic*, vol. 83, College Publications 2020.
(3) T. Witczak, *Topological and multi-topological frames in the context of intuitionistic modal logic*, Bulletin of the Section of Logic, vol. 48, no. 3 (2019), `https://czasopisma.uni.lodz.pl/bulletin/article/view/6205/5833`.

[3]W sensie ścisłym, tj. w recenzowanych czasopismach lub książkach; pomijamy tu pre-printy dostępne na arxiv.org, prezentacje konferencyjne czy teksty popularno-naukowe.

1. Intuicjonistyczna logika modalna na bazie semantyki otoczeniowej

1.1. Ujęcie otoczeniowe.

1.1.1. *Podstawowe pojęcia.* Semantyka otoczeniowa dla (klasycznych) logik modalnych wprowadzona została niezależnie przez Montague'a (1968), Segerberga (1968) i Scotta (1970). Obecnie wciąż jest wykorzystywana, przy czym dobrym przegładem jej wariantów i zastosowań jest książka Pacuit [101].

Główny pomysł polega na tym, że mamy model postaci $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$, gdzie W to dowolny zbiór niepusty, $\mathcal{N} : W \to P(P(W))$ to tzw. *funkcja otoczeniowa*, zaś $V : PV \to P(W)$ to wartościowanie. Każdy świat ma swoją (być może pustą) rodzinę otoczeń (które są po prostu podzbiorami W). Standardowa interpretacja spójników modalnych podana została poniżej (por. [101]):

$$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$$

$$w \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow -V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$$

Zaletą semantyki otoczeniowej jest m.in. fakt, że wiele słabych logik modalnych (w tym najsłabszy system **E**, zawierający jedynie regułę ekstensjonalności, *modus ponens*, aksjomat dualności i podstawienia modalne aksjomatów klasycznych) jest pełnych względem tej semantyki. Istnieją też logiki, które nie są otoczeniowo pełne (por. [46]) i takie, które są pełne otoczeniowo, lecz nie w odniesieniu do semantyki relacyjnej Kripkego (por. [45]). Vosmaer w [140] pokazuje, że nie ma takiej klasy zupełnych algebr Boole'a z operatorami, względem której logika badana w [46] byłaby pełna.

Semantyka otoczeniowa dla intuicjonistycznej logiki zdaniowej została zaprezentowana przez Moniri i Maleki w [90][4]. Okazała się dość podobna do semantyki otoczeniowej dla klasycznej logiki modalnej **S4**. Autorzy pokazali, że ich modele są punktowo równoważne z bardziej tradycyjnymi modelami relacyjnymi i topologicznymi dla intuicjonizmu (innymi słowy, pokazali, że modele otoczeniowe mogą być *postrzegane* jako kripkowskie i topologiczne). Mimo tej odpowiedniości, struktury otoczeniowe budzą pewne intuicje, które być może nie są tak klarowne w przypadku struktur alternatywnych względem nich. Na przykład Moniri i Maleki z dużym powodzeniem korzystali z faktu, że ich rodziny otoczeń były domknięte na nadzbiory, dzięki czemu duża część rozważań dotyczyła *de facto* tylko otoczeń minimalnych (zakłada się, do czego jeszcze wrócimy, że akceptacja implikacji intuicjonistycznej w danym świecie wymaga jej akceptacji na sposób klasyczny w każdym punkcie minimalnego otoczenia).

W ramach naszych badań postanowiliśmy odrzucić ów aksjomat nadzbioru i wziąć pod uwagę otoczenia *maksymalne*, być może różne od całego uniwersum. W ten sposób powstaje, mówiąc nieformalnie, "naturalne miejsce" dla modalności: możemy bowiem żądać, by *konieczność* oznaczała wymuszanie formuły w całym otoczeniu maksymalnym. Takie założenie pozwoliło nam zbudować klasy modeli pełnych względem normalnej intuicjonistycznej logiki (mono)modalnej z aksjomatami K i T, badanej przez Božica i Došena w [12]. Fakt ten pokażemy bezpośrednio, jak i poprzez transformację naszych modeli w odpowiednie modele bi-relacyjne. Przedstawimy też kilka dodatkowych wyników, które nie znalazły się w oryginalnej pracy Božica i Došena (jak własność skończonego modelu czy zagadnienie warstwowej bisymulacji). W dalszej części dotkniemy też problemu semantyki topologicznej. Jak wiadomo, w klasycznej logice modalnej strukturom topologicznym odpowiada

[4]Autorzy ci przedstawili też prosty wariant tej semantyki dla subintuicjonistycznej *Basic Propositional Logic* Vissera.

dopiero system **S4**, my natomiast pracujemy z intuicjonistycznym odpowiednikiem **KT**. To ograniczenie zamyka nam niektóre drogi, ale prowokuje do otwarcia innych.

1.1.2. *Alfabet i język.* Używać będziemy bardzo typowego języka. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

(1) PV to przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych $p, q, r, s, \ldots$.
(2) Spójniki i operatory logiczne to $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bot$, $\Box$.
(3) Spójnik $\neg$ (w kontekście $\neg\varphi$) traktujemy jako skrót od $\varphi \rightarrow \bot$.

Formuły budujemy w sposób rekursywny: dobrze zdefiniowanymi formułami są w pierwszej kolejności zmienne zdaniowe; jeżeli φ, ψ to już dobrze zdefiniowane formuły, wtenczas takimi są również $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ oraz $\Box\varphi$.

1.1.3. *Struktury i modele.* Naszą podstawową strukturą jest **in1**-struktura [5] zdefiniowania według następującego wzorca:

Definicja 1.1. Definiujemy **in1**-strukturę jako parę uporządkowaną $\langle W, \mathcal{N} \rangle$, w której:

(1) W to niepusty zbiór (światów).
(2) $\mathcal{N}$ to funkcja z W w $P(P(W))$ taka, że:
   (a) $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$ [przez $\mathcal{N}_w$ rozumiemy $\mathcal{N}(w)$].
   (b) $\bigcap \mathcal{N}_w \in \mathcal{N}_w$.
   (c) $u \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w$ (*$\rightarrow$-warunek*).
   (d) $X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ oraz $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w$ (*zrelatywizowany aksjomat nadzbioru*).
   (e) $u \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ (*$\Box$-warunek*).

W tak określonej strukturze wprowadzamy wartościowanie i reguły wymuszania formuł, dzięki czemu otrzymujemy model.

Definicja 1.2. Definiujemy **in1**-model jako trójkę $\langle W, \mathcal{N}, V \rangle$, gdzie $\langle W, \mathcal{N} \rangle$ to **in1**-struktura, zaś V to funkcja z PV w $P(W)$ taka, że: jeśli $w \in V(q)$, wówczas $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq V(q)$.

Definicja 1.3. Dla każdego **in1**-modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ i dla każdej formuły φ określamy relację $\Vdash$ pomiędzy światami i formułami w sposób induktywny:

(1) $w \nVdash \bot$.
(2) $w \Vdash q \Leftrightarrow w \in V(q)$ dla każdego $q \in PV$.
(3) $w \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ lub $w \Vdash \psi$.
(4) $w \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz $w \Vdash \psi$.
(5) $w \Vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi \text{ lub } v \Vdash \psi\}$.
(6) $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi\}$.

Jak wspomnieliśmy, $\neg\varphi$ to skrót dla $\varphi \rightarrow \bot$. Zatem $w \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi\}$.

Czasami będziemy pisać $X \Vdash \varphi$, gdzie X będzie podzbiorem W, w szczególności maksymalnym lub minimalnym otoczeniem (np. $\bigcap \mathcal{N}_w \Vdash \varphi$). Będzie to oznaczać, że *każdy* element X wymusza φ.

W standardowy sposób uznajemy, że φ jest spełniona w modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \Vdash \varphi$ dla każdego $w \in W$. Jest ona *(globalnie) prawdziwa* (czyli jest *tautologią*), gdy jest spełniona w każdym **in1**-modelu. φ *nie* jest *kontrtautologią*, gdy istnieje model, w którym istnieje świat w taki, że $w \Vdash \varphi$.

Wartościowanie V oryginalnie określone było tylko dla zmiennych zdaniowych, ale oczywiście definicja wymuszania pozwala je rozszerzyć na dowolne formuły, zatem będziemy stosować zapis $V(\varphi) = \{z \in W; z \Vdash \varphi\}$.

[5] **in1** od **i**ntuitionistic **n**eighbourhood.

W odniesieniu do $\rightarrow$-warunku i $\Box$-warunku możemy sformułować dwie równoważne ich definicje:

Lemat 1.4. *W każdej* **in1** *-strukturze $\rightarrow$-warunek jest równoważny następującej własności:*

$$\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq X\}$$

Dowód.
($\Rightarrow$)
Weźmy $w \in W$ taki że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X$, gdzie $X \subseteq W$. Rozważmy $Y = \{v \in W; \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq X\}$. Przypuśćmy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \nsubseteq Y$, zatem istnieje pewien $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$ dla którego $u \notin Y$. Stąd $\bigcap \mathcal{N}_u \nsubseteq X$, więc istnieje $r \in \bigcap \mathcal{N}_u$ taki, że $r \notin X$. Ale jeśli $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$, to $\bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X$. Wtedy $r \in X$, co daje nam sprzeczność.
($\Leftarrow$)
Niech $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$ dla pewnego $w \in W$. Oczywiście $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w$, a stąd $\bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \{v \in W; \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w\}$. A więc $\bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w$.

$\Box$

Lemat 1.5. *W każdej* **in1** *-strukturze $\Box$-warunek jest równoważny następującej własności:*

$$\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq X \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq X\}$$

Dowód.
($\Rightarrow$)
Weźmy $w \in W$ taki że $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq X$, gdzie $X \subseteq W$. Niech $Y = \{v \in W; \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq X\}$. Załóżmy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \nsubseteq Y$. Mamy zatem $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$ dla którego $u \notin Y$. Istnieje więc $r \in \bigcup \mathcal{N}_u$ taki że $r \notin X$. Ale z $\Box$-warunku $\bigcup \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq X$, a to jest sprzeczność.
($\Leftarrow$)
Niech $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Rzecz jasna zawsze $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Wtedy $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w\}$. Stąd $\bigcup \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$.

$\Box$

Wymuszanie formuł w naszym modelu jest *monotoniczne*, co w tym kontekście oznacza, że jeśli formuła jest prawdziwa w świecie, to również w całym jego minimalnym otoczeniu. Prawidłowość tę, pożądaną przy budowie systemu *intuicjonistycznego*, wyraża następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.6. *Niech $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ będzie* **in1** *-modelem oraz $w \in W$. Jeżeli $w \Vdash \varphi$, to $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq V(\varphi)$.*

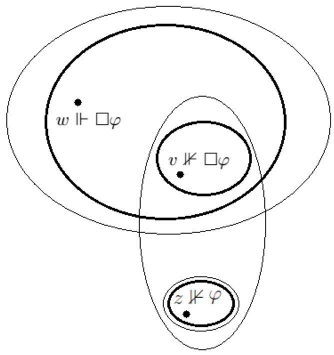
Dowód. Dowód prowadzony jest poprzez indukcję po złożoności budowy formuły. Prezentujemy jedynie przypadki implikacji i modalności.

(1) $w \Vdash \varphi \rightarrow \psi$. To znaczy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; z \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi\}$. Z drugiej strony, $V(\varphi \rightarrow \psi) = \{v \in W; v \Vdash \varphi \rightarrow \psi\} = \{v \in W; \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \{z \in W; z \nVdash \varphi$ lub $z \Vdash \psi\}\}$. Ale stąd (z uwagi na Lemat 1.4) mamy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq V(\varphi \rightarrow \psi)$.
(2) $w \Vdash \Box\varphi$. To znaczy, że $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq Y = \{v \in W; v \Vdash \varphi\}$. Z drugiej strony, $V(\Box\varphi) = \{v \in W; v \Vdash \Box\varphi\} = \{v \in W; \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq Y\}$. Przyjmijmy teraz, że $\bigcap \mathcal{N}_w \nsubseteq V(\Box\varphi)$. Istnieje zatem $z \in \bigcap \mathcal{N}_w$ dla którego $z \notin V(\Box\varphi)$. Mamy zatem $s \in \bigcup \mathcal{N}_z$ taki że $s \nVdash \varphi$. Ale $\bigcup \mathcal{N}_z \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq Y = V(\varphi)$. To sprzeczność.

$\Box$

$\Box$-warunek jest nader istotny dla monotoniczności naszych modeli. Można bowiem łatwo zaprezentować model, który od **in1**-modelu różni się jedynie tym, iż w definicji struktury rezygnuje się z $\Box$-warunku - i można tak określić wartościowanie, że pewna formuła nie będzie wymuszana w sposób monotoniczny. Rozważmy:

$M = \langle W, \mathcal{N}, V\rangle$, gdzie $W = \{w, v, z\}$, $\bigcap \mathcal{N}_w = \bigcup \mathcal{N}_w = \{w, v\}$, $\bigcap \mathcal{N}_v = \{v\}, \bigcup \mathcal{N}_v = \{v, z\}$, $\bigcap \mathcal{N}_z = \bigcup \mathcal{N}_z = \{z\}$, $V(\varphi) = \{w, v\}$.



Rysunek 1. Ilustracja kontr-przykładu.

Weźmy v. Oczywiście $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Widzimy, że $w \Vdash \Box\varphi$. Ale $v \nVdash \Box\varphi$, ponieważ $z \in \bigcup \mathcal{N}_v$ i zarazem $z \nVdash \varphi$. Zauważmy, że $z \notin \bigcup \mathcal{N}_w$, zatem $\bigcup \mathcal{N}_v \nsubseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Istotnie więc, $\Box$-warunek nie jest spełniony.

1.1.4. *Aksjomatyzacja i pełność.* Dowiedziemy bezpośrednio, że logika wyznaczana przez **in1**-struktury to intuicjonistyczny, monomodalny wariant logiki **KT**, tzn. system $\mathbf{iKT}_\Box$, na który składają się następujące reguły i aksjomaty: [6]

(1) **IPC**, tj. zbiór wszystkich aksjomatów intuicjonistycznych.
(2) K, tj. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.
(3) T, tj. $\Box\varphi \to \varphi$.
(4) RN, tj. reguła konieczności $(\varphi \vdash \Box\varphi)$.
(5) MP, tj. reguła *modus ponens*: $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.7. *System* $\mathbf{iKT}_\Box$ *jest przystosowany*[7] *do klasy wszystkich* **in1**-*struktur.*

Dowód. W zgodzie z powszechną praktyką w takich przypadkach, w zasadzie pomijamy sprawdzenie faktu, że reguły i aksjomaty $\mathbf{iKT}_\Box$ są prawdziwe w **in1**-strukturach. Jest to raczej proste ćwiczenie, nawet jeśli osoby przyzwyczajone tylko do semantyki (bi)-relacyjnej będą musiały przejść do myślenia w kategoriach minimalnych i maksymalnych otoczeń. Większość przypadków sprawdzić można nie wprost. Dla przykładu: załóżmy, że w pewnym modelu istnieje taki $w \in W$, że $w \nVdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$ dla pewnych φ i ψ. Czyli istnieje $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$, że $v \Vdash \varphi$ oraz $v \nVdash \psi \to \varphi$. Zatem istnieje $z \in \bigcap \mathcal{N}_v$, że $z \Vdash \psi$ i $z \nVdash \varphi$. Ale $z \Vdash \varphi$ (z monotoniczności wymuszania), co daje nam sprzeczność. $\Box$

Przejdziemy teraz do zagadnienia pełności. Przyjmujemy następującą definicję:

[6]A właściwie: schematy aksjomatów. Takie uproszczone utożsamienie będziemy przyjmować w całej rozprawie (nie będziemy rozważać logik, które nie byłyby domknięte na podstawianie).

[7]Ang. *sound*.

Definicja 1.8. **iKT$_\Box$**-teoria to zbiór formuł, który zawiera wszystkie aksjomaty i jest domknięty na regułę MP.

Jak widać, teoria nie jest domknięta na regułę konieczności. To ograniczenie jest takie samo jak w przypadku klasycznych logik modalnych. Dodajmy, że w dalszej części tego podrozdziału będziemy na ogól nazywać **iKT$_\Box$**-teorie po prostu "teoriami".

Poniższy lemat to semantyczny odpowiednik twierdzenia o dedukcji (którego nie mamy w typowej wersji, co znów stanowi analogię z klasycznymi logikami modalnymi):

Lemat 1.9. *(por.* [77]*)*
Jeżeli w jest teorią, to $\varphi \to \psi \in w \Leftrightarrow \psi \in v$ dla wszystkich teorii v takich, że $w \cup \{\varphi\} \subseteq v$.

Teraz wprowadzimy pojęcie *prime*-teorii (teorii pierwszej, teorii relatywnie maksymalnej):

Definicja 1.10. Teorię w zwiemy *prime*-teorią, jeśli spełnia poniższe warunki:
(1) $\varphi \vee \psi \in w \Leftrightarrow \varphi \in w$ lub $\psi \in w$.
(2) $\perp \notin w$ (i.e. w jest niesprzeczna).

Dowód poniższego twierdzenia (Lindenbauma) przebiega w sposób standardowy, nie wymaga aplikowania żadnych narzędzi modalnych (wystarczy reguła MP, którą oczywiście mamy).

Lemat 1.11. *Każda niesprzeczna teoria w_γ (tj. taka, która nie zawiera pewnej formuły γ) może zostać rozszerzona do* prime-*teorii w'_γ.*

Należy zdefiniować model kanoniczny.

Definicja 1.12. Definiujemy **can-in1** (*kanoniczny* **in1** *-model*) jako trójkę $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$ w której:
(1) W to zbiór wszystkich *prime*-teorii.
(2) Funkcja otoczeniowa to przekształcenie $\mathcal{N} : W \to P(P(W))$ takie że
$X \in \mathcal{N}_w \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$,
przy czym:
(a) $\bigcap \mathcal{N}_w = \{v \in W : w \subseteq v\}$.
(b) $\bigcup \mathcal{N}_w = \{v \in W : \Box\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in v\}$.
(3) $V : PV \to P(W)$ to funkcja taka, że $w \in V(q) \Leftrightarrow q \in w$.

Oczywiście musimy wiedzieć, że:

Lemat 1.13. **can-in1** *jest prawidłowo zbudowanym* **in1** *-modelem.*

Dowód. Dowód wymaga sprawdzenia odpowiednich warunków, konstytuujących **in1**-model.
(1) $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Ten warunek zachodzi, bo $\bigcap \mathcal{N}_w$ to zbiór teorii, w których zawiera się w.
(2) $\bigcap \mathcal{N}_w \in \mathcal{N}_w$. Otóż $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w$ oraz $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Pierwsza inkluzja jest oczywista, zatem sprawdźmy drugą. Niech $z \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Załóżmy, że $\Box\varphi \in w$. Jak wiemy, w to teoria, zawiera zatem aksjomat T. Zatem $\varphi \in w$. Skoro zaś $\Box\varphi \in w$, to $\varphi \in z$ (bo $w \subseteq z$). Finalnie $z \in \bigcup \mathcal{N}_w$.
(3) $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w$. Warunek ten jest spełniony dzięki sposobowi, w jaki zdefiniowano otoczenia.
(4) $v \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w$. Niech $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Weźmy $u \in \bigcap \mathcal{N}_v$. Wtedy $v \subseteq u$, ale też $w \subseteq v$ - czyli $w \subseteq u$. Zatem $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$.

(5) $v \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Załóżmy nie wprost, że istnieją takie $w, v \in W$ dla których: $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$, ale $\bigcup \mathcal{N}_v \nsubseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem mamy taki $u \in \bigcup \mathcal{N}_v$, który nie należy do $\bigcup \mathcal{N}_w$. Jeżeli więc $\Box\varphi \in v$, to $\varphi \in u$, ale zarazem znajdziemy ψ taką, że $\Box\psi \in w$ oraz $\psi \notin u$. Jeśli jednak $\Box\psi \in w$, to $\Box\psi \in v$ (bo $w \subseteq v$). Zatem $\psi \in u$ (sprzeczność).

Jest to więc **in1**-struktura. Monotoniczność wartościowania wynika z tego, że minimalne otoczenia zdefiniowano jako kolekcje nadzbiorów danej teorii.

$\Box$

Teraz przedstawimy twierdzenie, które w ogólności bywa nazywane *lematem głównym* dla modeli kanonicznych.

Twierdzenie 1.14. *Jeżeli $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$ to* **can-in1** *-model, wtedy dla każdego $w \in W$ prawdziwa jest następująca równoważność: $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in w$.*

Dowód. Dowód przebiega indukcyjnie. Dwa istotne przypadki to spójnik $\rightarrow$ i operator $\Box$.

(1) Niech $\varphi := \gamma \rightarrow \psi$.

($\Rightarrow$)

Załóżmy, że $\gamma \rightarrow \psi \notin w$. Twierdzenie o dedukcji i lemat o rozszerzaniu pozwalają nam wnosić, że istnieje $v \in W$ taki że $\gamma \in v, w \subseteq v$ oraz $\psi \notin v$. Ale jeśli $w \subseteq v$, to $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Z indukcji mamy, że $v \Vdash \gamma$ oraz $v \nVdash \psi$. Zatem $w \nVdash \gamma \rightarrow \psi$.

($\Leftarrow$)

Niech $\gamma \rightarrow \psi \in w$. Przyjmijmy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W : v \Vdash \gamma\}$. Z indukcji $\gamma \in w$. Weźmy $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Wtedy $w \subseteq u$. Stąd $\gamma \rightarrow \psi \in u$. Tak więc że $\gamma \in u$ oraz $\gamma \rightarrow \psi \in u$. Z *MP* wnosimy, że $\psi \in u$, zatem $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W : v \Vdash \gamma \Rightarrow v \Vdash \psi\}$. Finalnie $w \Vdash \gamma \rightarrow \psi$.

(2) Niech $\varphi := \Box\psi$.

($\Rightarrow$)

Przypuśćmy, że $\Box\psi \notin w$. Rozważmy $\bigcup \mathcal{N}_w = \{v \in W; \Box\psi \in w \Rightarrow \psi \in v\}$. Jeśli $\Box\psi \notin w$, to $\psi \notin \{\gamma; \Box\gamma \in w\}$. Oznaczmy ten ostatni zbiór jako $\Box^{-1}w$. Jest on w szczególności teorią. Niech bowiem $\delta \rightarrow \xi \in \Box^{-1}w$ oraz $\delta \in \Box^{-1}w$. Wtedy $\Box(\delta \rightarrow \xi) \in w$ oraz $\Box\delta \in w$. Z aksjomatu *K* mamy, że $\Box\xi \in w$, zatem $\xi \in \Box^{-1}w$. Zatem $\Box^{-1}w$ jest domknięty na *MP* .

Teraz z lematu o rozszerzaniu znajdujemy *prime*-teorię u dla której mamy, że $\Box^{-1}w \subseteq u$ oraz $\psi \notin u$. Co więcej, $u \in \bigcup \mathcal{N}_w$ - gdyby nie, to istniałaby formuła γ taka że $\Box\gamma \in w$ oraz $\gamma \notin u$. Ale to znaczyłoby, że $\gamma \in \Box^{-1}w$, a przez to $\gamma \in u$ (bo $\Box^{-1}w \subseteq u$).

Otrzymaliśmy więc $u \in \bigcup \mathcal{N}_u$ taką, że $\psi \notin u$, a to z założenia indukcyjnego znaczy, że $u \nVdash \varphi$. Zatem $w \nVdash \Box\psi$, tzn. $w \nVdash \varphi$.

($\Leftarrow$)

Niech $w \nVdash \Box\psi$. Istnieje więc $v \in \bigcup \mathcal{N}_w$ taka, że $v \nVdash \psi$. Z założenia indukcyjnego $\psi \notin v$. Stąd $\Box\psi \notin w$. Załóżmy, że nie. Otóż jeśli $\Box\psi \in w$, to z definicji $\bigcup \mathcal{N}_w$ mamy $\psi \in v$.

$\Box$

Ostatnie twierdzenie w tym podrozdziale jest kluczowe i potwierdza aksjomatyzację logiki wyznaczanej przez nasze struktury.

Twierdzenie 1.15. **iKT$_\Box$** *jest pełna względem klasy wszystkich* **in1** *-struktur.*

Dowód. Niech w będzie teorią oraz $w \nvdash \varphi$ dla pewnej φ. To znaczy m.in., że $\varphi \notin w$. Możemy więc rozszerzyć w do relatywnie maksymalnej *prime*-teorii v takiej, że $w \subseteq v$ oraz $\varphi \notin v$. Wówczas dla każdej $\psi \in w$, $v \Vdash \psi$ oraz $v \nVdash \varphi$. Ostatnie twierdzenie oznacza w szczególności, że φ nie jest semantyczną konsekwencją w. $\Box$

1.2. **Ujęcie bi-relacyjne.** Rozumowania zaprezentowane w poprzednim rozdziale wynikały w naturalny sposób z refleksji nad modelami otoczeniowymi dla czystego intuicjonizmu. Sądzimy, że ów język otoczeniowy, tj. myślenie w kategoriach minimalnych i maksymalnych otoczeń, jest wygodny przy analizowaniu intuicjonistycznych (a potencjalnie być może i innych, np. sub- i superintuicjonistycznych) systemów modalnych. Tym niemniej można nasze modele traktować jako bi-relacyjne. Będą one wówczas zgodne z klasą tzw. skondensowanych (*condensed*) $\mathbf{H}_\Box$-modeli, wprowadzonych przez Božića i Došena w [12]. Jeżeli chodzi o zastosowaną przez nich aksjomatyzację, to była równoważna naszej, acz formalnie nieco inna: użyli aksjomatów modalnych $\Box\varphi\wedge\Box\psi \to \Box(\varphi\wedge\psi)$ i $\Box(\varphi \to \varphi)$ oraz reguły $\varphi \to \psi \vdash \Box\varphi \to \Box\psi$ (tj. reguły monotoniczności).

Zdefiniujmy zatem struktury i modele bi-relacyjne odpowiadające naszym **in1**-modelom.

Definicja 1.16. Definiujemy bi-relacyjną $\mathbf{iKT}_\Box$-strukturę (**br1**-strukturę) jako trójkę $F^{\leqslant,R} = \langle W, \leqslant, R\rangle$, gdzie W to zbiór niepusty, $\leqslant$ to pre-porządek na $W \times W$, zaś R to relacja binarna na $W \times W$ taka, że:

(1) $\forall w, v \in W\ [w \leqslant v \Rightarrow wRv]$.
(2) $\forall w, v, u \in W\ [w \leqslant v \Rightarrow (vRu \Rightarrow wRu)]$.

Definicja 1.17. Definiujemy bi-relacyjny $\mathbf{iKT}_\Box$-model (**br1**-model) jako czwórkę $M^{\leqslant,R} = \langle W, \leqslant, R, V\rangle$, gdzie $\langle W, \leqslant, R\rangle$ to **br1**-struktura, zaś V to funkcja z PV w $P(W)$ spełniająca warunek: jeśli $w \in V(q)$, to dla każdego $v \in W$ takiego, że $w \leqslant v$, mamy $v \in V(q)$.

Definicja 1.18. Dla każdego **br1**-modelu $M^{\leqslant,R} = \langle W, \leqslant, R, V\rangle$ i dla każdej formuły φ definiujemy:

(1) $w \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow$ dla każdego $v \in W$ takiego, że $w \leqslant v$, $v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi$.
(2) $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow$ dla każdego $v \in W$ $[wRv \Rightarrow v \Vdash \varphi]$.

Łatwo wykazać następujący lemat:

Lemat 1.19. *W każdym* **br1** *-modelu $M^{\leqslant,R}$ wymuszanie formuł jest $\leqslant$-monotoniczne, tzn. jeśli $w \Vdash \varphi$, to $\forall v \in W\ w \leqslant v \Rightarrow v \Vdash \varphi$.*

Uzbrojeni w powyższe narzędzia przedstawimy dwa twierdzenia o transformacji pomiędzy strukturami otoczeniowymi i bi-relacyjnymi:

Twierdzenie 1.20. *Niech $M^{\leqslant,R} = \langle W, \leqslant, R, V\rangle$ będzie* **br1** *-modelem. Istnieje wtedy* **in1** *-model $M^{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}, V\rangle$ taki, że oba są punktowo równoważne.*

Dowód. (zarys)

Zdefiniujmy (dla każdego $w \in W$) dwa zbiory:

(1) $\bigcap\mathcal{N}_w = \{v \in W; w \leqslant v\}$.
(2) $\bigcup\mathcal{N}_w = \{v \in W; wRv\}$.

Określmy teraz funkcję $\mathcal{N} : W \to P(P(W))$ w taki sposób, że $X \in \mathcal{N}_w \Leftrightarrow \bigcap\mathcal{N}_w \subseteq X \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$. Twierdzimy, że $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$ to **in1**-model. Pominiemy (indukcyjny) dowód punktowej równoważności, ale sprawdzimy pięć warunków otoczeniowych:

(1) $w \in \bigcap\mathcal{N}_w$. Tak jest, gdyż $w \leqslant w$.
(2) $\bigcap\mathcal{N}_w \in \mathcal{N}_w$. Musimy pokazać, że $\bigcap\mathcal{N}_w \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$. Niech $u \in \bigcap\mathcal{N}_w$. To znaczy, że $w \leqslant u$. Ale wtedy wRu. Zatem $u \in \bigcup\mathcal{N}_w$.
(3) $u \in \bigcap\mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap\mathcal{N}_u \subseteq \bigcap\mathcal{N}_w$. Niech $u \in \bigcap\mathcal{N}_w$. Zatem $w \leqslant u$. Jeżeli teraz $v \in \bigcap\mathcal{N}_u$, to $w \leqslant u \leqslant v$. Stąd, $v \in \bigcap\mathcal{N}_w$.
(4) $\bigcap\mathcal{N}_w \subseteq X \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w \Rightarrow X \in \bigcap\mathcal{N}_w$ - to wynika z samej definicji $\mathcal{N}$.

(5) $u \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Niech $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$, tj. $w \leqslant u$. Niech $v \in \bigcup \mathcal{N}_u$. To znaczy, że uRv. Z definicji R wnosimy też, że wRv. Finalnie $v \in \bigcup \mathcal{N}_w$.

□

Twierdzenie 1.21. *Niech* $M^{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ *będzie* **in1** *-modelem. Istnieje wtedy* **br1** *-model* $M^{\leqslant,R} = \langle W, \leqslant, R, V \rangle$ *taki, że oba są punktowo równoważne.*

Dowód. Zdefiniujmy na $W \times W$ dwie relacje, tj. $\leqslant$ i R:

(1) $w \leqslant v \Leftrightarrow v \in \bigcap \mathcal{N}_w$.
(2) $wRv \Leftrightarrow v \in \bigcup \mathcal{N}_w$.

Łatwo pokazać, że $\leqslant$ to pre-porządek. Punktowa równoważność dowodzona jest indukcyjnie, co pomijamy. Sprawdźmy warunki, które wiążą $\leqslant$ i R:

(1) $\forall w, v \in W\ w \leqslant v \Rightarrow wRv$. To wynika z faktu, że minimalne w-otoczenie jest zawarte w maksymalnym.
(2) $\forall w, v, u \in W\ w \leqslant v \Rightarrow (vRu \Rightarrow wRu)$. To wynika z $\Box$-warunku. Niech bowiem $w \leqslant v$ i vRu. Zatem $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$ oraz $u \in \bigcup \mathcal{N}_v$. Ale $\bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem wRu.

□

Przy pomocy ujęcia bi-relacyjnego dość wygodnie pokazać można własność skończonego modelu dla logiki $\mathbf{iKT}_\Box$ (tego zagadnienia nie ma w pracy [12]). Dowody tej własności dla niektórych innych intuicjonistycznych systemów modalnych czytelnik znajdzie np. w [56] i [132]. Uwaga techniczna: w dalszej części tego rozdziału pominiemy, pisząc o **br1** -modelach, wyrażenie ${}^{\leqslant,R}$ w indeksie górnym.

Definicja 1.22. Rozważmy **br1** -model $M = \langle W, \leqslant, R, V \rangle$ oraz formułę γ taką, że istnieje $w \in W$ dla którego $w \nVdash \gamma$. Zdefiniujmy $\Sigma = Sub(\gamma)$, rozumiejąc przez to, że Σ jest zbiorem wszystkich podformuł formuły γ.

Definicja 1.23. Definiujemy relację równoważności $\sim$ na W następująco: $w \sim v \Leftrightarrow w \Vdash \alpha \Leftrightarrow v \Vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in \Sigma$. Przez $[w]$ oznaczamy klasę równoważności elementu w.

Definicja 1.24. Definiujemy filtrowaną **br1** -strukturę jako trójkę $F_\Sigma = \langle W_\Sigma, \leqslant_\Sigma, R_\Sigma \rangle$, w której:

(1) $W_\Sigma = \{[w]; w \in W\}$.
(2) $[w] \leqslant_\Sigma [v] \Leftrightarrow$ z faktu, że $w \Vdash \alpha$ wynika, że $v \Vdash \alpha$ dla każdej $\alpha \in \Sigma$.
(3) $[w] R_\Sigma [v] \Leftrightarrow$ z faktu, że $w \Vdash \Box\beta$ wynika, że $v \Vdash \beta$ dla każdej $\Box\beta \in \Sigma$.

Zbiór W_Σ jest skończony (bo Σ jest skończona). Sprawdźmy, że istotnie mamy **br1** -strukturę. Możemy zaprezentować poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 1.25. *Filtrowana struktura* F_Σ *jest* **br1** *-strukturą.*

Dowód. Sprawdźmy trzy warunki:

(1) $\leqslant_\Sigma$ to pre-porządek. Dowód jest łatwy.
(2) $[w] \leqslant_\Sigma [v] \Rightarrow [w] R_\Sigma [v]$. Niech $[w] \leqslant_\Sigma [v]$ oraz $w \Vdash \Box\beta$, gdzie $\Box\beta \in \Sigma$. Zatem $v \Vdash \Box\beta$. Ale wtedy $v \Vdash \beta$, czego oczekiwaliśmy.
(3) $[w] \leqslant_\Sigma [v] \Rightarrow ([v] R_\Sigma [u] \Rightarrow [w] R_\Sigma [u])$. Przypuśćmy, że $[w] \leqslant_\Sigma [v]$ oraz $[v] R_\Sigma [u]$. Załóżmy teraz, że $w \Vdash \Box\beta$, gdzie $\Box\beta \in \Sigma$. Zatem $v \Vdash \Box\beta$. Finalnie $u \Vdash \beta$.

□

Mamy następujący, prosty lemat:

Lemat 1.26. *Dla wszystkich* $w, v \in W$ *zachodzi:*

(1) Jeśli $w \leqslant v$*, to* $[w] \leqslant_\Sigma [v]$.

(2) Jeśli wRv, to $[w]R_\Sigma[v]$.

W końcu możemy naszą filtrowaną strukturę przetworzyć w **br1**-model (wprowadzając wartościowanie).

Definicja 1.27. Niech $M = \langle W, \leqslant, R, V\rangle$ będzie **br1**-modelem, zaś $F_\Sigma = \langle W_\Sigma, \leqslant_\Sigma, R_\Sigma\rangle$ filtrowaną **br1**-strukturą opartą na strukturze M. Definiujemy filtrowany **br1**-model M_Σ jako czwórkę $\langle W, \leqslant_\Sigma, R_\Sigma, V_\Sigma\rangle$, gdzie V_Σ to funkcja z PV w $P(W_\Sigma)$ taka, że:

$$V_\Sigma(q) = \begin{cases} \{[w]; w \in V(q)\} & q \in \Sigma \\ \emptyset & q \notin \Sigma \end{cases}$$

Łatwo można pokazać, że V_Σ jest monotoniczna względem $\leqslant_\Sigma$. Możemy zatem przystąpić do sformułowania i wykazania poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 1.28. *Jeśli dysponujemy* **br1**-*modelem M i filtrowanym* **br1**-*modelem M_Σ, to dla każdego $w \in W$ i dla każdej $\alpha \in \Sigma$ mamy równoważność:*
$w \Vdash \alpha \Leftrightarrow [w] \Vdash_{M_\Sigma} \alpha$.

Dowód. Dowód przebiega poprzez indukcję po złożoności formuły α. Sprawdźmy główne przypadki:

(1) $\alpha := \varphi \to \psi$. Niech $w \Vdash \alpha$. Zatem dla wszystkich $v \in W, w \leqslant v$, mamy $v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi$. Z założenia indukcyjnego, $[v] \nVdash_{M_\Sigma} \varphi$ lub $[v] \Vdash_{M_\Sigma} \psi$. Oczywiście $[w] \leqslant_\Sigma [v]$. Możemy więc powiedzieć, że $[w] \Vdash_{M_\Sigma} \varphi \to \psi$.

Załóżmy teraz, że $[w] \Vdash_{M_\Sigma} \alpha$ oraz $w \leqslant v$. Z tego drugiego założenia wynika, jak wiemy z Lematu 1.26, że $[w] \leqslant_\Sigma [v]$. Z pierwszego założenia mamy w takim razie, że $[v] \nVdash_{M_\Sigma} \varphi$ lub $[v] \Vdash_{M_\Sigma} \psi$. Z założenia indukcyjnego $v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi$. Ale wtedy możemy już powiedzieć, że $w \Vdash \varphi \to \psi$.

(2) $\alpha := \Box\varphi$. Niech $w \Vdash \alpha$. Dla wszystkich $v \in W, wRv$, mamy: $v \Vdash \varphi$. Z założenia indukcyjnego wnioskujemy więc, że $[v] \Vdash_{M_\Sigma} \beta$. Oczywiście $[w]R_\Sigma[v]$ - zatem $[w] \Vdash_{M_\Sigma} \alpha$.

Teraz przypuśćmy, że $[w] \Vdash_{M_\Sigma} \alpha$ oraz wRv. Z tego drugiego założenia mamy, że $[w]R_\Sigma[v]$. Z pierwszego natomiast, że dla każdej $[v] \in W_\Sigma$ takiej, iż $[w]R_\Sigma[v]$, zachodzi $[v] \Vdash_{M_\Sigma} \varphi$. Z indukcji $v \Vdash \varphi$. To jednak pozwala nam już orzec, iż $w \Vdash \Box\varphi$.

□

Powyższe dociekania możemy podsumować następująco:

Twierdzenie 1.29. *Logika* $\mathbf{iKT}_\Box$ *ma własność skończonego modelu (bi-relacyjnego) i dlatego (z uwagi na pełność) jest rozstrzygalna.*

Rzecz jasna ten sam wniosek pozostaje prawdziwy dla **in1**-modeli.

1.3. **Rozszerzenia języka.**

1.3.1. *Dodatkowa implikacja i t-warunek.* W tym podrozdziale będziemy znów pracować z modelami otoczeniowymi. Naszym celem jest przeformułowanie zaprezentowanego w [90] twierdzenia o n-bisymulacji w taki sposób, by było prawdziwe we *frameworku* intuicjonistyczno-modalnym. Użyteczna okaże się tutaj alternatywna forma implikacji: za cenę poszerzenia języka twierdzenie zostanie przeforsowane dla szerszej klasy struktur niż gdybyśmy korzystali z języka standardowego. Otóż nasz bazowy alfabet poszerzamy o spójnik $\rightsquigarrow$. Jest on interpretowany następująco:

Definicja 1.30. Dla każdego **in1**-modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, V\rangle$, dla każdego świata $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
$w \Vdash \varphi \rightsquigarrow \psi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi \text{ lub } v \Vdash \psi\}$.

Co prawda znajdziemy pewne praktyczne zastosowanie dla tego nowego spójnika, ale i tak możemy odwołać się do owej wspomnianej w przedmowie intuicji *naturalności.* Otóż jeśli dysponujemy minimalnymi i maksymalnymi otoczeniami, a implikację $\rightarrow$ rozpatrujemy w odniesieniu do tych pierwszych, to za narzucające się uważamy pytanie: czym byłaby, jak zachowywałaby się implikacja rozumiana podobnie, ale w otoczeniach maksymalnych? Można oczywiście powiedzieć, że faktyczne pytanie brzmi: do czego taka implikacja może się nam przydać? To będziemy wyjaśniać w dalszych definicjach i twierdzeniach.

Będziemy też używać $\sim$ jako skrótu dla $\varphi \rightsquigarrow \bot$. A zatem $w \Vdash \sim \varphi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi\}$. Następny lemat gwarantuje nam, że wymuszanie nowej implikacji jest monotoniczne:

Lemat 1.31. *Dla każdego* **in1** *-modelu* $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ *i każdego* $w \in W$ *mamy:* $w \Vdash \varphi \rightsquigarrow \psi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{z \in W; z \nVdash \varphi$ *lub* $z \Vdash \psi\}$.

Dowód. Niech $w \Vdash \varphi \rightsquigarrow \psi$ oraz $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Zatem $\bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi\}$. Finalnie $v \Vdash \varphi \rightsquigarrow \psi$. $\square$

Łatwo zauważyć, że w obecności $\rightsquigarrow$ nie potrzebujemy już $\Box$, tzn. możemy zdefiniować $\Box\varphi$ jako $\top \rightsquigarrow \varphi$ (aczkolwiek w razie potrzeby nadal będziemy używać $\Box$ jako skrótowego wyrazu powyższej formuły). Rodzi się więc pytanie o to, czy przypadkiem $\rightsquigarrow$ nie może zostać zdefiniowany przy pomocy spójników boolowskich i $\Box$. Odpowiedź brzmi: tak, ale tylko przy założeniu, że ograniczymy naszą klasę modeli do nieco węższej podklasy.

Definicja 1.32. Powiemy, że **in1**-struktura spełnia t-warunek $\Leftrightarrow$ $[v \in \bigcup \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w]$. Klasę **in1**-struktur, które spełniają t-warunek nazwiemy **in2**.

Teraz zachodzi oczekiwana prawidłowość.

Lemat 1.33. *W każdym* **in2** *-modelu* $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ *i dla każdego* $w \in W$ *mamy:* $w \Vdash (\varphi \rightsquigarrow \psi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$.

Dowód. Załóżmy, że istnieje **in2**-model w którym dla pewnego $w \in W$ i pewnych φ, ψ mamy: $w \nVdash (\varphi \rightsquigarrow \psi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$. Istnieje zatem $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$ taki że $v \Vdash (\varphi \rightsquigarrow \psi)$, ale $v \nVdash \Box(\varphi \rightarrow \psi)$. Zatem dla każdego $z \in \bigcup \mathcal{N}_v$, $z \nVdash \varphi$ lub $z \Vdash \psi$. Istnieje jednak $u \in \bigcup \mathcal{N}_v$ taki, iż $u \nVdash \varphi \rightarrow \psi$. Musi zatem być $s \in \bigcap \mathcal{N}_u$ dla którego $s \Vdash \varphi$ oraz $s \nVdash \psi$. W tym miejscu korzystamy z t-warunku, by powiedzieć, że $\bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_v$, a to daje nam sprzeczność. $\square$

Oczywiście formuła $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightsquigarrow \psi)$ jest prawdziwa w każdym **in1**-modelu. Zarazem łatwo zbudować **in1**-kontrmodel (nie spełniający t-warunku) dla implikacji z Lematu 1.33. Wystarczy tak dobrać wartościowanie φ i ψ oraz światy w i $v \in \bigcup \mathcal{N}_w$, że w będzie co prawda wymuszać $\neg\varphi \vee \psi$ w każdym punkcie swego maksymalnego otoczenia (zatem także w v), ale *minimalne* otoczenie v "nie zmieści się" w $\bigcup \mathcal{N}_w$, a zarazem będzie zawierać punkt u, znajdujący się poza $\bigcup \mathcal{N}_w$, akceptujący φ i odrzucający ψ. Wtedy $w \Vdash \varphi \rightsquigarrow \psi$, ale $w \nVdash \Box(\varphi \rightarrow \psi)$.

Poniższy lemat jest analogiczny do Lematu 1.4. Dowód biegnie podobnym torem, więc go pominiemy.

Lemat 1.34. *W dowolnej* **in1** *-strukturze* $\langle W, \mathcal{N} \rangle$ *t-warunek jest równoważny następującemu:* $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq X \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X\}$.

Bez wątpienia istotne jest następujące twierdzenie:

Lemat 1.35. can-in1 *-model spełnia t-warunek.*

Dowód. Załóżmy, że mamy *prime*-teorie v i w takie, że $v \in \bigcup \mathcal{N}_w$. To znaczy, że jeśli $\Box\varphi$ należy do w, to φ należy do v. Przypuśćmy teraz, że $\bigcap \mathcal{N}_v \nsubseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Mamy zatem pewien u dla którego $u \in \bigcap \mathcal{N}_v$ oraz $u \notin \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem $v \subseteq u$ i znajdziemy taką formułę γ, że $\Box\gamma \in w$, ale $\gamma \notin u$. Zarazem $\gamma \in v$. Ale $v \subseteq u$, co daje nam sprzeczność. □

Wynika z tego, że tak naprawdę logika $\mathbf{iKT}_\Box$ jest pełna względem klasy wszystkich **in2**-struktur (a nie tylko **in1**-struktur). Okazuje się przy tym, że model filtrowany również spełnia t-warunek.

Definicja 1.36. **br2**-strukturami nazwiemy **br1**-struktury, które spełniają birelacyjną wersję t-warunku, tzn. $wRv \Rightarrow (v \leqslant u \Rightarrow wRu)$.

Lemat 1.37. *Filtrowane* **br1** *-struktury są w istocie* **br2** *-strukturami.*

Dowód. W filtrowanym **br1**-modelu t-warunek można zapisać tak:
$[w]R_\Sigma[v] \Rightarrow ([v] \leqslant_\Sigma [u] \Rightarrow [w]R_\Sigma[u])$.
Niech $[w]R_\Sigma[v]$ oraz $[v] \leqslant_\Sigma [u]$. Przyjmijmy teraz, że $w \Vdash \Box\beta, \Box\beta \in \Sigma$. Zatem $v \Vdash \beta$. Wtedy $u \Vdash \beta$, a więc $[w]R_\Sigma[u]$. □

Mamy zatem własność skończonego modelu w odniesieniu do **br2**-struktur. Należy dodać, że t-warunek został wyróżniony także przez Božica i Došena. W ich terminologii **br2**-struktury to struktury *ściśle skondensowane* (*strictly condensed*). Autorzy ci również dowiedli pełności $\mathbf{iKT}_\Box$ względem tej klasy, natomiast ich rozważania nie odnosiły się do spójnika $\rightsquigarrow$.

Doprecyzujmy, że mówiąc tu o pełności $\mathbf{iKT}_\Box$, mieliśmy na myśli system *bez* implikacji $\rightsquigarrow$, bądź przy założeniu, że $\varphi \rightsquigarrow \psi$ utożsamiamy z $\Box(\varphi \to \psi)$. Nie mamy natomiast pełnej aksjomatyzacji $\mathbf{iKT}_\Box$ z implikacją $\rightsquigarrow$ względem klasy wszystkich **in1**-modeli, tj. bez t-warunku.

1.3.2. *Ograniczone morfizmy, bisymulacje i n-bisymulacje.* W dalszym ciągu pracujemy z językiem wyposażonym w $\rightsquigarrow$, acz z jego dobroczynnych własności realnie skorzystamy dopiero w odniesieniu do n-bisymulacji. Jeśli chodzi o ograniczone morfizmy, bisymulacje i behawioralną równoważność, to ograniczymy się jedynie do podania podstawowych definicji, a twierdzenia prezentowane będą bez (prostych, ale dość niewdzięcznych) dowodów. Te ostatnie czytelnik może znaleźć w [144]. Jedynie w przypadku bisymulacji przedstawimy krótki fragment rozumowania.

Ograniczone morfizmy

Definicja 1.38. Niech $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1\rangle$ i $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2\rangle$ będą dwoma **in1**-modelami. Funkcja $f : W^1 \to W^2$ jest *ograniczonym morfizmem* z M^1 w M^2, jeżeli dla każdego $w \in W$ mamy (przy czym $f[X]$ to obraz zbioru X przez funkcję f):

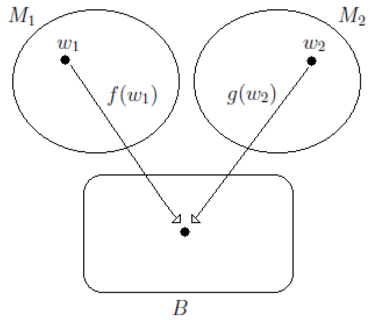
(1) dla każdej zmiennej $q \in PV$ zachodzi $w \Vdash_{M^1} q \Leftrightarrow f(w) \Vdash_{M^2} q$.
(2) $f[\bigcap \mathcal{N}^1_w] = \bigcap \mathcal{N}^2_{f(w)}$.
(3) $f[\bigcup \mathcal{N}^1_w] = \bigcup \mathcal{N}^2_{f(w)}$.

Prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.39. *Niech $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1\rangle$ i $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2\rangle$ będą dwoma* **in1** *-modelami. Jeśli $f : W^1 \to W^2$ to ograniczony morfizm z M^1 w M^2, to dla każdej formuły φ i każdego $w \in W^1$ zachodzi następująca równoważność: $w \Vdash_{M^1} \varphi \Leftrightarrow f(w) \Vdash_{M^2} \varphi$.*

Behawioralna równoważność

Definicja 1.40. Niech $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1\rangle$ i $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2\rangle$ będą dwoma **in1**-modelami. Powiemy, że światy $w_1 \in W^1$ i $w_2 \in W^2$ są *behawioralnie równoważne*, jeśli istnieje **in1**-model $B = \langle W_B, \mathcal{N}_B, V_B\rangle$ oraz ograniczone morfizmy $f : M^1 \to B$ i $g : M^2 \to B$ takie, że $f(w_1) = g(w_2)$.



Rysunek 2. Behawioralna równoważność.

Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1.41. *Niech* $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1\rangle$ *i* $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2\rangle$ *będą dwoma* **in1** *-modelami. Jeżeli* $w_1 \in W^1$ *oraz* $w_2 \in W^2$ *są behawioralnie równoważne, to dla każdego* φ *mamy:* $w_1 \Vdash_{M^1} \varphi \Leftrightarrow w_2 \Vdash_{M^2} \varphi$.

Bisymulacja

Definicja 1.42. Niech $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1\rangle$ i $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2\rangle$ będą dwoma **in1**-modelami. Niepusta relacja binarna $B \subseteq W^1 \times W^2$ zwana jest *bisymulacją* pomiędzy M^1 i M^2, jeśli dla wszystkich $w_1 \in W^1, w_2 \in W^2$ takich, że $w_1 B w_2$, mamy:

(1) Dla każdej zmiennej $q \in PV$: $w_1 \Vdash_{M^1} q \Leftrightarrow w_2 \Vdash_{M^2} q$.
(2) Dla każdego $y \in \bigcap \mathcal{N}^2_{w_2}$ istnieje $x \in \bigcap \mathcal{N}^1_{w_1}$ taki że xBy.
(3) Dla każdego $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{w_2}$ istnieje $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$ taki że xBy.
(4) Dla każdego $x \in \bigcap \mathcal{N}^1_{w_1}$ istnieje $y \in \bigcap \mathcal{N}^2_{w_2}$ taki że xBy.
(5) Dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$ istnieje $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{w_2}$ taki że xBy.

Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1.43. *Niech* $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1\rangle$ *i* $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2\rangle$ *będą dwoma* **in1** *-modelami z bisymulacją* B *pomiędzy nimi. Wtedy z faktu, że* $w_1 B w_2$*, wynika że* w_1 *oraz* w_2 *spełniają te same formuły.*

Dowód. (fragment)
Dla przykładu, niech $\gamma = \Box\varphi$. Załóżmy, że $w_1 \Vdash_{M^1} \gamma$, tj. $\bigcup \mathcal{N}^1_{w_1} \subseteq \{v \in W^1; v \Vdash_{M^1} \varphi\}$. Niech $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{w_2}$. Istnieje zatem $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$ taki że xBy. Skoro $w_1 \Vdash_{M^1} \Box\varphi$, to $x \Vdash_{M^1} \varphi$. Zatem (z założenia indukcyjnego) $y \Vdash_{M^2} \varphi$. To znaczy, że $w_2 \Vdash_{M^2} \Box\varphi$. □

n-bisymulacja
Pojęcie n-bisymulacji wprowadził Visser w [139]. Aby je zaimplementować w naszym *frameworku*, określmy wpierw ideę *stopnia formuł*.

Definicja 1.44. Stopień formuły definiowany jest następująco:

(1) $deg(q) = 0$ for any $q \in PV$.
(2) $deg(\bot) = 0$.
(3) $deg(\varphi \vee \psi) = deg(\varphi \wedge \psi) = \max(deg(\varphi), deg(\psi))$.
(4) $deg(\varphi \to \psi) = deg(\varphi \rightsquigarrow \psi) = 1 + \max(deg(\varphi), deg(\psi))$.

Zauważmy, że nie definiujemy tego stopnia dla operatora □. Wynika to po prostu z tego, że - jak już wiemy - jest on wyrażalny przez $\top$ i $\rightsquigarrow$. Tym niemniej można dla porządku przyjąć następujące rozumienie: $deg(\Box\varphi) = 1 + deg(\varphi)$.

Definicja 1.45. Niech $M^1 = \langle W^1, \mathcal{N}^1, V^1 \rangle$ i $M^2 = \langle W^2, \mathcal{N}^2, V^2 \rangle$ będą dwoma **in1**-modelami. Załóżmy, że $w_1 \in M^1$ i $w_2 \in M^2$. Powiemy, że w_1 i w_2 są *n-bisymularne* (w n-bisymulacji), jeżeli istnieje ciąg relacji binarnych $R_n \subseteq ... \subseteq R_0$ o następujących własnościach (dla $i + 1 \leqslant n$):

(1) $w_1 R_n w_2$.
(2) Jeżeli $w_1 R_0 w_2$, to w_1 i w_2 wymuszają te same zmienne zdaniowe.
(3) Jeżeli $w_1 R_{i+1} w_2$, to dla każdego $y \in \bigcap \mathcal{N}^2_{w_2}$ istnieje $x \in \bigcap \mathcal{N}^1_{w_1}$ dla którego $x R_i y$.
(4) Jeżeli $w_1 R_{i+1} w_2$, to dla każdego $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{w_2}$ istnieje $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$ dla którego $x R_i y$.
(5) Jeżeli $w_1 R_{i+1} w_2$, to dla każdego $x \in \bigcap \mathcal{N}^1_{w_1}$ istnieje $y \in \bigcap \mathcal{N}^2_{w_2}$ dla którego $x R_i y$.
(6) Jeżeli $w_1 R_{i+1} w_2$, to dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$ istnieje $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{w_2}$ dla którego $x R_i y$.

Mamy w związku z tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.46. *Niech Π będzie skończonym zbiorem zmiennych zdaniowych. Załóżmy, że M^1 i M^2 to* **in1** *-modele dla języka opartego tylko o zmienne z Π. Wtedy dla każdego $w_1 \in M^1$ i $w_2 \in M^2$ następujące warunki są równoważne:*

(1) w_1 i w_2 są n-bisymularne.
(2) w_1 i w_2 wymuszają te same formuły stopnia co najwyżej n.

Dowód. ($\Rightarrow$)

Ta część dowodu to indukcja względem n. Przypadek, gdy $n = 0$, jest oczywisty. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz w_1 i w_2 są n-bisymularne. Rozważmy zbiór $\Gamma^{n+1}_{w_1}$, zawierający wszystkie te formuły stopnia co najwyżej $n+1$, które spełnione są w świecie w_1. Kolekcja ta jest równoważna pojedynczej formule Θ_1, która może zostać zapisana jako $\bigwedge \Gamma^{n+1}_{w_1}$. Nasz zbiór zmiennych zdaniowych jest skończony, zatem dla każdego n mamy (z dokładnością do logicznej równoważności) tylko skończenie wiele formuł stopnia nie większego niż n.

Analogicznie dla w_2 rozważamy Θ_2. Pokażemy, że Θ_2 jest spełniona przez w_1, zaś Θ_1 przez w_2. Zajmijmy się pierwszym z tych przypadków (drugi jest zupełnie symetryczny, tyle że trzeba skorzystać z odpowiednich warunków z Def. 1.45).

Przypuśćmy zatem, że $deg(\Theta_1) = n + 1$. Wtedy Θ_1 to boolowska kombinacja zmiennych zdaniowych i formuł postaci:

$\gamma := \varphi \to \psi$, przy czym $max\{deg(\varphi), deg(\psi)\} = n$,
$\gamma := \varphi \rightsquigarrow \psi$, przy czym $max\{deg(\varphi), deg(\psi)\} = n$.

Wystarczy pokazać, że jeśli γ ma jedną z powyższych postaci, to z faktu, że $w_1 \Vdash_{M_1} \gamma$ wynika, że $w_2 \Vdash_{M_2} \gamma$. Przypadek $\to$ będzie zupełnie taki jak w oryginalnym twierdzeniu [90], zatem skoncentrujemy się na $\rightsquigarrow$.

Przyjmijmy, że $w_1 \Vdash_{M^1} \varphi \rightsquigarrow \psi$. Chcemy osiągnąć następujący wniosek: że $\bigcup \mathcal{N}^2_{w_2} \subseteq \{v \in W^2; v \Vdash_{M_2} \varphi \Rightarrow v \Vdash_{M_2} \psi\}$.

Weźmy $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{w_2}$ i załóżmy, że $y \Vdash_{M^2} \varphi$. Teraz używamy warunku 4 z Def. 1.45, by znaleźć $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$ taki że $x R_n y$. Z założenia $deg(\varphi) \leqslant n$. Zatem $x \Vdash_{M^1} \varphi$ i przez to $x \Vdash_{M^1} \psi$. To oznacza, że $y \Vdash_{M^2} \psi$.

($\Leftarrow$)

Zakładamy teraz, że w_1 i w_2 są zgodne względem wszystkich formuł stopnia co najwyżej n. Definiujemy poniższy ciąg relacji:

$R_n = \{\langle x, y \rangle; x \in W^1, y \in W^2, deg(\varphi) \leqslant n, x \Vdash_{M^1} \varphi \Leftrightarrow y \Vdash_{M^2} \varphi\}$;
$R_{n-1} = \{\langle x, y \rangle; x \in W_1, y \in W^2, deg(\varphi) \leqslant n-1, x \Vdash_{M^1} \varphi \Leftrightarrow y \Vdash_{M^2} \varphi\}$;

$$\vdots$$
$R_0 = \{\langle x,y\rangle; x \in W^1, y \in W^2, deg(\varphi) = 0, x \Vdash_{M^1} \varphi \Leftrightarrow y \Vdash_{M^2} \varphi\};$

Jak widać, $R_n \subseteq R_{n-1} \subseteq ... \subseteq R_0$. Trzeba sprawdzić poszczególne warunki z definicji n-bisymulacji. W odniesieniu do warunków 1 i 2 sprawa jest jasna. Warunki 3 i 5 można sprawdzić tak jak w [90]. Zajmiemy się więc warunkami 4 i 6, a właściwie pierwszym z nich.

Załóżmy, że $u_1 R_{i+1} u_2$. Oznacza to w szczególności, że u_1 i u_2 wymuszają te same formuły stopnia co najwyżej $i+1$. Musimy pokazać, że dla każdego $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{u_2}$ istnieje taki $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{u_1}$, że $x R_i y$.

Załóżmy, że tak nie jest: że istnieje taki $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{u_2}$, iż dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{u_1}$ znajdzie się formuła φ_x, $deg(\varphi_x) \leqslant i$, dla której:
$y \Vdash_{M^2} \varphi_x$ oraz $x \nVdash_{M^1} \varphi_x$
lub
$y \nVdash_{M^2} \varphi_x$ oraz $x \Vdash_{M^1} \varphi_x$

Niech Γ będzie zbiorem wszystkich takich φ_x. Ten zbiór jest skończony (z dokładnością do formuł logicznie równoważnych). Rozważmy teraz dwa podzbiory Γ:
$\Gamma_0 = \{\varphi_x \in \Gamma\ ;\ y \Vdash_{M^2} \varphi_x$ oraz $x \nVdash_{M^1} \varphi_x\}$
$\Gamma_1 = \{\varphi_x \in \Gamma\ ;\ y \nVdash_{M^2} \varphi_x$ oraz $x \Vdash_{M^1} \varphi_x\}$

Definiujemy teraz następującą formułę (stopnia nie większego niż $i+1$):

$$\Theta = \begin{cases} \bigwedge \Gamma_0, & \Gamma_1 = \emptyset \\ \bigwedge \Gamma_0 \rightsquigarrow \bigvee \Gamma_1, & \Gamma_0 \neq \emptyset, \Gamma_1 \neq \emptyset \\ \bigvee \Gamma_1, & \Gamma_0 = \emptyset \end{cases}$$

i) Załóżmy, że Γ_1 jest zbiorem pustym. Wtedy możemy powiedzieć, że $y \Vdash_{M^2} \Theta$. Zatem $u_2 \nVdash_{M^2} \sim \Theta$ (gdyż, jak pamiętamy, $y \in \bigcup \mathcal{N}^2_{u_2}$). Dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{u_1}$ mamy $x \nVdash_{M_1} \Theta$. Zatem $\bigcup \mathcal{N}^1_{u_1} \subseteq \{z \in W^1; z \nVdash_{M^1} \Theta\}$. Tak więc $u_1 \Vdash_{M^1} \sim \Theta$. To jednak sprzeczność, ponieważ $deg(\sim \Theta) \leqslant i+1$. Ten ostatni fakt wynika z tego, że sama Θ jest w tym wypadku stopnia $\leqslant i$ (jako koniunkcja formuł tegoż stopnia), zatem $\sim \Theta$ jest stopnia $\leqslant i+1$.

ii) Załóżmy teraz, że $\Gamma_0 \neq \emptyset$ oraz $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Rozważmy poniższy zbiór:
$K = \{v \in W^1; v \nVdash_{M^1} \bigwedge \Gamma_0$ lub $v \Vdash_{M^1} \bigvee \Gamma_1\} \cup \{v \in W^2; v \nVdash_{M^2} \bigwedge \Gamma_0$ lub $v \Vdash_{M^2} \bigvee \Gamma_1\}$.

Dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{u_1}, x \nVdash_{M_1} \bigwedge \Gamma_0$ - zatem $\bigcup \mathcal{N}^1_{u_1} \subseteq K$. Tak więc $u_1 \Vdash_{M_1} \Theta$. Równocześnie jednak $y \Vdash_{M^2} \bigwedge \Gamma_0$ oraz $y \nVdash_{M^2} \bigvee \Gamma_1$. Stąd $\bigcup \mathcal{N}^2_{u_2} \nsubseteq K$, tzn. $u_2 \nVdash_{M^2} \Theta$. To jednak sprzeczność, bo $deg(\Theta) \leqslant i+1$. To ostatnie wynika z faktu, że teraz Θ to implikacja (w sensie $\rightsquigarrow$), w której poprzednik to koniunkcja, a następnik to alternatywa formuł stopnia $\leqslant i$.

iii) Trzecia możliwość: $\Gamma_0 = \emptyset$. Wtedy $y \nVdash_{M^2} \Theta$. Zatem $u_2 \nVdash_{M^2} \Box\Theta$. Ale dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_{w_1}$, $x \Vdash_{M^1} \Theta$. Zatem $u_1 \Vdash_{M^1} \Box\Theta$. To sprzeczność - ponieważ $deg(\Box\Theta) \leqslant i+1$.

$\Box$

Zauważmy, że skorzystanie ze spójników $\sim$ i $\rightsquigarrow$ było tu istotne. To znaczy: nie mamy co prawda dowodu na to, że w języku *bez tych spójników* twierdzenie dałoby się obalić, ale możemy przedstawić pewne poszlaki.

Wyobraźmy sobie mianowicie, że prowadzilibyśmy dowód w stronę $\Leftarrow$ tak samo, ale zastępując $\sim$ przez $\Box\neg$, zaś $\alpha \rightsquigarrow \beta$ przez $\Box(\alpha \to \beta)$. Wówczas w punkcie **i**) moglibyśmy słusznie powiedzieć, że jeśli $y \Vdash_{M^2} \Theta$, to w szczególności $u_2 \nVdash_{M^2} \Box\neg\Theta$ (albowiem jeśli u_2 nie wymusza *nawet* $\sim \Theta$, to tym bardziej nie wymusza $\Box\neg\Theta$). Ale z faktu, że $\bigcup \mathcal{N}^1_{u_1} \subseteq \{z \in W^1; z \nVdash_{M^1} \Theta\}$ nie możemy wnioskować, iż $u_1 \Vdash_{M^1} \Box\neg\Theta$. Taką konkluzję moglibyśmy wyprowadzić jedynie w **in2**-strukturze, gdzie mielibyśmy, że dla każdego $z \in \bigcup \mathcal{N}^1_{u_1}$ zachodzi $\bigcap \mathcal{N}_z \subseteq \bigcup \mathcal{N}^1_{u_1}$.

Podobnie w punkcie **ii**). Jeśli przyjmiemy, że Θ to $\Box(\bigwedge\Gamma_0 \to \bigvee\Gamma_1)$, to z faktu, że $\bigcup\mathcal{N}^1_{u_1} \subseteq K$ nie możemy wnioskować, iż $u_1 \Vdash_{M^1} \Theta$ (nie wiemy bowiem, co się dzieje w minimalnych otoczeniach punktów z $\bigcup\mathcal{N}^1_{u_1}$). Wciąż jednak $u_2 \nVdash_{M^2} \Theta$. Gdybyśmy z kolei uznali, że Θ to po prostu $\bigwedge\Gamma_0 \to \bigvee\Gamma_1$, wtenczas co prawda moglibyśmy powiedzieć, że $u_1 \Vdash_{M^1} \Theta$, ale nie mielibyśmy gwarancji, że $u_2 \nVdash_{M^2} \Theta$ (bo nie wiemy, czy $y \in \bigcap\mathcal{N}^2_{u_2}$).

1.3.3. *Operator możliwości i warunki nakładane na struktury.* Fischer Servi wprowadziła (zob. [123]) struktury bi-relacyjne, które spełniały pewne dwa warunki wiążące częściowy porządek z relacją R. Plotkin i Stirling w [109] rozważają jeszcze dwie dodatkowe klauzule. Poniższa lista zawiera wszystkie cztery warunki:

(1) **F1** . Jeżeli $w \leqslant u$ oraz wRv, to istnieje taki $z \in W$, że uRz oraz $v \leqslant z$.
(2) **F2** . Jeżeli wRv oraz $v \leqslant u$, to istnieje taki $z \in W$, że $w \leqslant z$ oraz zRu.
(3) **PS1** . Jeżeli $w \leqslant v$ oraz vRu, to istnieje taki $z \in W$, że wRz oraz $z \leqslant u$.
(4) **PS2** . Jeżeli $w \leqslant v$ oraz uRv, to istnieje taki $z \in W$, że zRw oraz $z \leqslant u$.

Te same cztery warunki niżej zostały zapisane w naszym języku otoczeniowym.

(1) **F1** . Jeżeli $u \in \bigcap\mathcal{N}_w$ oraz $v \in \bigcup\mathcal{N}_w$, to istnieje taki $z \in W$, że $z \in \bigcup\mathcal{N}_u$ oraz $z \in \bigcap\mathcal{N}_v$.
(2) **F2** . Jeżeli $v \in \bigcup\mathcal{N}_w$ oraz $u \in \bigcap\mathcal{N}_v$, to istnieje taki $z \in W$, że $z \in \bigcap\mathcal{N}_w$ oraz $u \in \bigcup\mathcal{N}_z$.
(3) **PS1** . Jeżeli $v \in \bigcap\mathcal{N}_w$ oraz $u \in \bigcup\mathcal{N}_v$, to istnieje $z \in W$, że $z \in \bigcup\mathcal{N}_w$ oraz $u \in \bigcap\mathcal{N}_z$.
(4) **PS2** . Jeżeli $v \in \bigcap\mathcal{N}_w$ oraz $v \in \bigcup\mathcal{N}_u$, to istnieje $z \in W$, że $w \in \bigcup\mathcal{N}_z$ oraz $u \in \bigcap\mathcal{N}_z$.

Które z tych warunków są spełnione w **in1** - i **in2** -strukturach? Jakie zależności można zaobserwować? Tego dotyczą lematy w poniższym podrozdziale. Ich dowody, jeśli chodzi o koncept matematyczny, są proste, ale niestety dość żmudne. Szczegóły w większości pomijamy. Zaznaczmy, że dla wygody będziemy dość swobodnie przechodzić pomiędzy ujęciem bi-relacyjnym a otoczeniowym.

Lemat 1.47. **F1** *nie jest spełniony w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Rozważmy taką **in1** -strukturę: $W = \{w, v, u\}$, gdzie $\bigcap\mathcal{N}_w = \{w, u\}$, $\bigcup\mathcal{N}_w = \{w, u, v\}$ oraz dla u i v ich maksymalne i minimalne otoczenia to po prostu ich singletony. Widzimy, że $w \leqslant u$ oraz wRv. Ale dla każdego $z \in W$ mamy $\neg(w \leqslant z)$ lub $\neg(uRz)$. Sprawdźmy to. Niech $z = w$. Oczywiście $w \notin \bigcap\mathcal{N}_v$, zatem nieprawda, że $(v \leqslant w)$. Tak samo dla $z = u$. Jeżeli $z = v$, to $v \notin \bigcup\mathcal{N}_u$, tzn. nieprawda, że uRv. Zatem **F1** nie zachodzi. $\Box$

Lemat 1.48. *W* **in1** *-strukturach t-warunek jest równoważny z* **F2** *.*

Dowód. Po pierwsze, t-warunek implikuje **F2** . Zawsze możemy użyć po prostu w w roli naszego szukanego z.

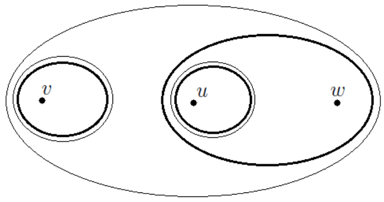
Po drugie, załóżmy, że mamy **in1** -strukturę, która spełnia **F2** , ale t-warunek w niej nie zachodzi. Mamy zatem takie $v, w \in W$, że $v \in \bigcup\mathcal{N}_w$, ale $\bigcap\mathcal{N}_v \nsubseteq \bigcup\mathcal{N}_w$. Istnieje zatem $u \in \bigcap\mathcal{N}_v$, który nie należy do $\bigcup\mathcal{N}_w$. Ale wtedy (właśnie z **F2**) istnieje taki $z \in \bigcap\mathcal{N}_w$, że $u \in \bigcup\mathcal{N}_z$. Z $\Box$-warunku $\bigcup\mathcal{N}_z \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$. Tak więc $u \in \bigcup\mathcal{N}_w$. To sprzeczność. $\Box$

Następny lemat to oczywisty wniosek z powyższego.

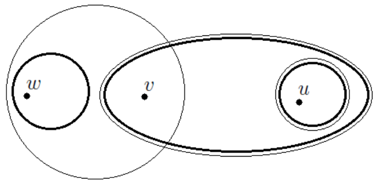
Lemat 1.49. **F2** *nie jest ogólnie prawdziwy w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Rozważmy taką strukturę: $W = \{w, u, v\}$, $\bigcap\mathcal{N}_w = \{w\}$, $\bigcup\mathcal{N}_w = \{w, v\}$, poza tym $\bigcap\mathcal{N}_v = \bigcup\mathcal{N}_v = \{v, u\}$, zaś maksymalnym i zarazem minimalnym otoczeniem u jest po prostu $\{u\}$. Możemy rzec, iż wRv (bo $v \in \bigcup\mathcal{N}_w$). Co więcej,

$v \leqslant u$, gdyż $u \in \bigcap\mathcal{N}_v$. Ale dla każdego $z \in W$ mamy $\neg(w \leqslant z)$ lub $\neg(zRu)$. Sprawdźmy to. Niech $z = w$, wtedy $u \notin \bigcup\mathcal{N}_w$, czyli $\neg(wRu)$. Jeżeli $z = v$, to $v \notin \bigcap\mathcal{N}_w$. Tak samo dla $z = u$. Zatem **F2** nie zachodzi. □



Rysunek 3. Kontr-przykład dla **F1**



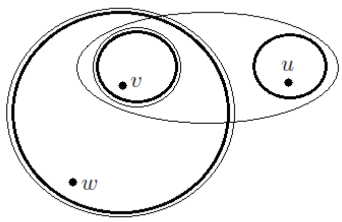
Rysunek 4. Kontr-przykład dla **F2**

Lemat 1.50. **PS1** *jest zawsze spełniony w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. W istocie zawsze możemy potraktować u jako z. Rzecz jasna, $u \in \bigcup\mathcal{N}_w$ (to wynika z $\Box$-warunku) oraz $u \in \bigcap\mathcal{N}_u$. □

Lemat 1.51. **PS2** *nie jest prawdziwy w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Rozważmy strukturę: $W = \{w, v, u\}, \bigcap\mathcal{N}_w = \bigcup\mathcal{N}_w = \{w, v\}, \bigcap\mathcal{N}_v = \bigcup\mathcal{N}_v = \{v\}, \bigcap\mathcal{N}_u = \{u\}$ oraz $\bigcup\mathcal{N}_u = \{u, v\}$. Teraz: $v \in \bigcap\mathcal{N}_w$ oraz $v \in \bigcup\mathcal{N}_u$, ale nie ma żadnego świata, który mógłby pełnić rolę z. Powody: $u \notin \bigcap\mathcal{N}_w$, $w \notin \bigcup\mathcal{N}_u$ oraz $w \notin \bigcup\mathcal{N}_v$. □



Rysunek 5. Kontr-przykład dla **PS2** .

Rodzi się pytanie o hipotetyczne relacje pomiędzy **PS2** , **F1** i **F2** (oczywiście w **in1** -strukturach). Poniżej kilka prostych lematów, które porządkują tę kwestię.

Lemat 1.52. **F1** *nie implikuje* **F2** *w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że kontr-struktura dla **F2** (przedstawiona wcześniej) spełnia **F1** . □

Lemat 1.53. **F2** *nie implikuje* **F1** *w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Rozważmy wcześniejszą kontr-strukturę dla **F1** . Spełnia ona t-warunek i dlatego spełnia **F2** . □

Lemat 1.54. **PS2** *nie implikuje* **F1** *w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Zauważmy, że nasza wcześniejsza kontr-struktura dla **F1** spełnia **PS2** . □

Lemat 1.55. **F1** *nie implikuje* **PS2** *w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Przypomnijmy kontr-strukturę dla **PS2** . Sprawdzając wszystkie możliwości można pokazać, że spełnia ona **F1** . $\square$

Lemat 1.56. **PS2** *nie implikuje* **F2** *w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Przypomnijmy kontr-strukturę dla **F2** . Zachodz w niej **PS2** . $\square$

Lemat 1.57. **F2** *nie implikuje* **PS2** *w* **in1** *-strukturach.*

Dowód. Kontr-struktura z Lematu 1.51 spełnia t-warunek. $\square$

Warunki Fischer Servi mają pewne praktyczne uzasadnienie. Autorka użyła **F1** , aby przeforsować monotoniczność wymuszania w odniesieniu do operatora *możliwości.* Z kolei monotoniczność wymuszania konieczności została przez nią zakodowana w samej definicji $\Box$. W naszym zapisie otoczeniowym wyglądałoby to tak:

$$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{x \in W; \bigcup \mathcal{N}_x \Vdash \varphi\}.$$

Nasze rozwiązanie jest inne. Używamy dużo mniej skomplikowanej definicji wymuszania konieczności, ale płacimy za to w ten sposób, że przyjmujemy $\Box$-warunek. Oczywiście w jego obecności konieczności nasza i Fischer Servi stają się równoważne.

W pre-princie [144] uwagi na temat operatora możliwości były bardziej rozbudowane niż tutaj, ale w dużej mierze miały charakter przeglądowy i były oparte na [123]. Jak wspominaliśmy w przedmowie, nasza rozprawa nie ma być całościowym, systematycznym przeglądem szerokiej tematyki intuicjonistycznych logik modalnych i dlatego ograniczymy się tu jedynie do najbardziej podstawowych kwestii. Rozważanie detali takich jak np. różne warianty intuicjonistycznej możliwości (koncepcje Božica i Došena, Plotkina i Stirlinga czy Wijesekery) albo musiałoby zmienić charakter naszej pracy, albo byłoby pobieżne i przez to niewystarczające.

W każdym razie w naszym *frameworku* możemy w dość prosty sposób określić pewne rozumienie operatora $\Diamond$:

$$w \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow \text{istnieje taki } v \in \bigcup \mathcal{N}_w, \text{ że } v \Vdash \varphi.$$

Aby zagwarantować sobie monotoniczność wymuszania formuł możliwościowych, narzucamy na nasze struktury warunek **F1** .

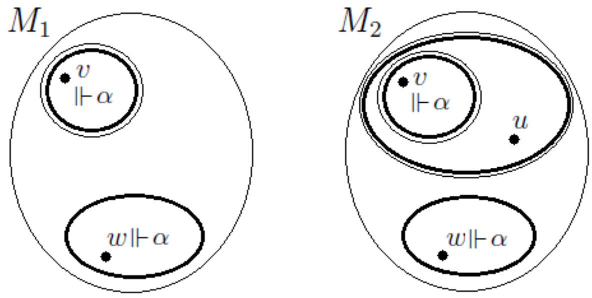
Definicja 1.58. Powiemy, że **in1** -struktura (model) jest **in1-F1** -strukturą (modelem), jeżeli spełnia **F1** -warunek.

Lemat 1.59. *Dla każdego* **in1-F1** *-modelu* $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$*, dla każdego* $w \in W$ *i dla każdej formuły* φ*: jeżeli* $w \Vdash \varphi$*, to* $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq V(\varphi)$*.*

Dowód. Sprawdźmy przypadek operatora $\Diamond$. Niech $w \Vdash \Diamond\varphi$. Istnieje wtedy pewien $v \in \bigcup \mathcal{N}_w$ taki, że $v \Vdash \varphi$. Przypuśćmy, że $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Nasza struktura spełnia **F1** , zatem mamy odpowiedni z. Otóż $z \in \bigcap \mathcal{N}_v$, a więc spełnia φ - a ponieważ równocześnie z należy do $\bigcup \mathcal{N}_u$, to możemy powiedzieć, że $u \Vdash \Diamond\varphi$. $\square$

Božić i Došen zdefiniowali $\Diamond$ w [12] tak jak i my (acz w semantyce bi-relacyjnej), po czym wskazali klasę struktur, której odpowiadała pewna bi-modalna logika intuicjonistyczna. Niestety, w systemie tym dało się dowieść twierdzenia $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$. Niestety, bo wielu autorów przyjmuje (m.in. z pewnych pobudek filozoficznych, por. [123]), że w intuicjonistycznych logikach modalnych $\Diamond$ i $\Box$ nie powinny być wzajemnie definiowalne. Otóż w logice bi-modalnej definiowanej przez klasę wszystkich **in1-F1** -struktur (nie mamy aksjomatyzacji tego systemu) operatory te *nie są* wzajemnie definiowalne. Mówią o tym poniższe dwa lematy.

Twierdzenie 1.60. *W logice wyznaczanej przez klasę wszystkich* **in1-F1** *-modeli* $\Box$ *nie jest definiowalny w terminach innych spójników.*



Rysunek 6. $\Box$ nie jest wyrażalny przez $\Diamond$ i pozostałe operatory

Dowód. Rozważmy dwa **in1-F1** -modele:

$M_1 = \langle W, \mathcal{N}^1, V^1 \rangle$, gdzie $W = \{w, v\}, \bigcap \mathcal{N}^1_w = \{w\}, \bigcup \mathcal{N}^1_w = \{w, v\}, \bigcap \mathcal{N}^1_v = \bigcup \mathcal{N}^1_v = \{v\}$ oraz $V^1(\alpha) = \{w, v\}$.
$M_2 = \langle W \cup \{u\}, \mathcal{N}^2, V^2 \rangle$, gdzie $\bigcap \mathcal{N}^2_w = \{w\}, \bigcup \mathcal{N}^2_w = \{w, v, u\}, \bigcap \mathcal{N}^2_v = \bigcup \mathcal{N}^2_v = \{v\}, \bigcap \mathcal{N}^2_u = \bigcup \mathcal{N}^2_u = \{u, v\}$ oraz $V^2_{|W} = V^1$.

Modele są (dla naszych celów) prawidłowo zdefiniowane. Zauważmy, że jeśli $V^2_{|W} = V^1$, to pojawienie się świata u (który nie wymusza żadnych formuł) nie wpływa na wymuszanie zmiennych zdaniowych w w. W istocie pokażemy, że dla każdej formuły φ, która nie zawiera $\Diamond$, mamy: $w \Vdash_{M_1} \varphi \Leftrightarrow w \Vdash_{M_2} \varphi$.

Otóż dla zmiennych zdaniowych mamy: $w \Vdash_{M_1} q \Leftrightarrow w \in V^1(q) \Leftrightarrow w \in V^2(q) \Leftrightarrow w \Vdash_{M_2} q$. Koniunkcję i alternatywę pomijamy, zaś w odniesieniu do implikacji mamy następujący ciąg równoważności:

$w \Vdash_{M_1} \gamma \to \delta \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}^1_w \subseteq \{x \in W; x \nVdash_{M_1} \gamma \text{ lub } x \Vdash_{M_1} \delta\} \Leftrightarrow \{w\} \subseteq \{x \in W; x \nVdash_{M_1} \gamma \text{ lub } x \Vdash_{M_1} \delta\} \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}^2_w \subseteq \{x \in W \cup \{u\}; x \nVdash_{M_1} \gamma \text{ lub } x \Vdash_{M_1} \delta\} \Leftrightarrow w \Vdash_{M_2} \gamma \to \delta$.

Załóżmy teraz, że $\varphi := \Diamond\gamma$ i $w \Vdash_{M_1} \Diamond\gamma$. Istnieje zatem $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_w$ taki że $x \Vdash_{M_1} \gamma$. Ale oczywiście $x \in \bigcup \mathcal{N}^2_w$ (bo $W \subseteq W \cup \{u\}$). Z założenia indukcyjnego $x \Vdash_{M_2} \gamma$ i przez to $w \Vdash_{M_2} \Diamond\gamma$.

Z drugiej strony, niech $w \Vdash_{M_2} \Diamond\gamma$. Istnieje zatem $x \in \bigcup \mathcal{N}^2_w$ taki że $x \Vdash_{M_2} \gamma$. Są trzy możliwości. Jeżeli $x = w$ lub $x = v$, to $x \in \bigcup \mathcal{N}^1_w$. Z założenia indukcyjnego, $x \Vdash_{M_1} \gamma$ i przez to $w \Vdash_{M_1} \Diamond\gamma$. Jeżeli $x = u$, to $v \Vdash_{M_2} \gamma$ (bo v należy do minimalnego u-otoczenia). Teraz powtarzamy wcześniejsze rozumowanie.

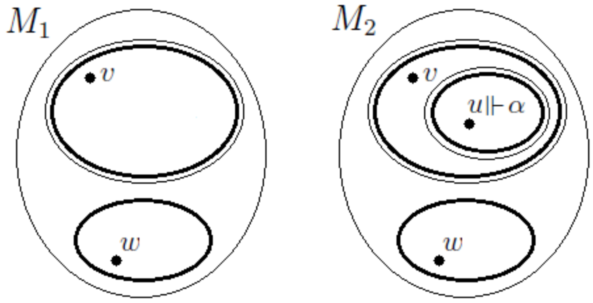
Zauważmy jednak, że $w \Vdash_{M_1} \Box\alpha$, ale $w \nVdash_{M_2} \Box\alpha$ (ponieważ u nie wymusza α, a przecież $u \in \bigcup \mathcal{N}^2_w$).

$\Box$

Nawiasem mówiąc, kontr-model ten pokazuje nam przy okazji, że $\rightsquigarrow$ nie jest definiowalna przy pomocy pozostałych spójników: oto bowiem $w \Vdash_{M_1} \top \rightsquigarrow \alpha$, ale $w \nVdash_{M_2} \top \rightsquigarrow \alpha$ (ze względu na u).

Twierdzenie 1.61. *W logice wyznaczanej przez klasę wszystkich* **in1-F1** *-modeli* $\Diamond$ *nie jest definiowalny w terminach innych spójników.*

Dowód. Tym razem rozważamy dwa następujące modele:



RYSUNEK 7. $\Diamond$ nie jest wyrażalny przez $\Box$ i pozostałe operatory

$M_1 = \langle W, \mathcal{N}^1, V^1 \rangle$, gdzie $W = \{w, v\}, \bigcap \mathcal{N}^1_w = \{w\}, \bigcup \mathcal{N}^1_w = \{w, v\}, \bigcap \mathcal{N}^1_v = \bigcup \mathcal{N}^1_v = \{v\}$ oraz $V^1(\alpha) = \emptyset$.

$M_2 = \langle W \cup \{u\}, \mathcal{N}^2, V^2 \rangle$, gdzie $\bigcap \mathcal{N}^2_w = \{w\}, \bigcup \mathcal{N}^2_w = \{w, v, u\}, \bigcap \mathcal{N}^2_v = \bigcup \mathcal{N}^2_v = \{v, u\}, \bigcap \mathcal{N}^2_u = \bigcup \mathcal{N}^2_u = \{u\}$ oraz $V^2(\alpha) = \{u\}$.

Dla każdej φ, która nie zawiera $\Diamond$, zachodzi: $w \Vdash_{M_1} \varphi \Leftrightarrow w \Vdash_{M_2} \varphi$. Dowód prowadzony jest indukcyjnie. Przypadek zmiennych zdaniowych jest prosty, podobnie ma się rzecz z $\wedge$, $\vee$ oraz $\rightarrow$. Co do $\Box$, to sprawdźmy następujący ciąg równoważności:

$w \Vdash_{M_1} \Box\varphi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}^1_w \Vdash_{M_1} \varphi \Leftrightarrow \{w, v\} \Vdash_{M_1} \varphi \Leftrightarrow \{w, v\} \Vdash_{M_2} \varphi \Leftrightarrow \{w, v, u\} \Vdash_{M_2} \varphi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}^2_w \Vdash_{M_2} \varphi \Leftrightarrow w \Vdash_{M_2} \Box\varphi$.

Wykorzystaliśmy założenie indukcyjne i fakt, że u jest w minimalnym v-otoczeniu. Z tego powodu akceptacja formuły w v wymusza jej akceptację w u.

Zauważmy jednak, że choć $w \nVdash_{M_1} \Diamond\alpha$, to jednak $w \Vdash_{M_2} \Diamond\alpha$.

$\Box$

Na koniec warto odnotować następujący fakt, który daje pewną (częściową) zależność między naszymi modalnościami. W dowodzie używamy t-warunku, który, jak wiemy, implikuje **F1**).

Lemat 1.62. *W* **in2** *-modelu prawdziwa jest formuła* $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.

Dowód. Załóżmy, że w pewnym **in2** -modelu istnieje świat z falsyfikujący powyższą formułę. Istnieje zatem $w \in \bigcap \mathcal{N}_z$ taki, że $w \Vdash \neg\Box\neg\varphi$ oraz $w \nVdash \Diamond\varphi$. Wtedy dla każdego $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$, $v \nVdash \Box\neg\varphi$. Istnieje zatem $u \in \bigcup \mathcal{N}_v$ taki, że $u \nVdash \neg\varphi$. Musi zatem istnieć $x \in \bigcap \mathcal{N}_u$ taki, że $x \Vdash \varphi$. Z drugiej strony, dla każdego $y \in \bigcup \mathcal{N}_w$ mamy $y \nVdash \varphi$.

Wszelako jeżeli $v \in \bigcap \mathcal{N}_w$, to $\bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ (z $\Box$-warunku). Ale z t-warunku mamy, że $\bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem $x \nVdash \varphi$, co daje sprzeczność.

$\Box$

1.3.4. *Publiczne obwieszczanie.* Podejmowane były już pewne próby adaptacji pojęcia "publicznego obwieszczania" (*public announcement*) w *settingu* intuicjonistycznych logic modalnych: przy zastosowaniu semantyki algebraicznej (por. [103]) i bi-relacyjnej (por. [6]). Ma i Sano przedstawili w [83] podejście otoczeniowe, ale w odniesieniu do klasycznej logiki modalnej. Będziemy czerpać głównie z [6] i [83]. Nasza logika jest (jeżeli brać pod uwagę tylko formuły modalne, bez dodatkowego operatora $[\varphi]$, o którym za chwilę) nieco silniejsza niż ta z [6], bo zawiera aksjomat T . Z drugiej strony, nasz system nie zawiera $\Diamond$, brak mu też operatora $\langle\varphi\rangle$.

Przypuśćmy, że mamy nasz standardowy **in1** -model $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$. Będziemy dodatkowo uwzględniać podmodele[8] postaci $M^{\cap X} = \langle X, \mathcal{N}^{\cap X}, V^{\cap X}\rangle$, gdzie $\emptyset \neq X \subseteq W$ oraz:

$\mathcal{N}_w^{\cap X} = \{Y; Y = Z \cap X$, po wszystkich $Z \in \mathcal{N}_w\}$.

Wartościowanie w $M^{\cap X}$ to po prostu $V \cap X$. Operator publicznego obwieszczania (operator PAL) zdefiniujemy tak:

$$w \Vdash [\varphi]\psi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash_\varphi \psi\}.$$

Będziemy używać określenia "$\mathbf{in1}_{PAL}$-model" w odniesieniu do **in1** -struktur takich jak dotychczasowe, wszelako rozpatrywanych przy założeniu, że nasz język (i relację forcingu formuł) poszerzyliśmy w opisany przed chwilą sposób.

Zapis $w \Vdash_X \psi$ oznacza, że mówimy o wymuszaniu w $M^{\cap X}$. W szczególności może być tak, że $X = V(\varphi)$. W takim wypadku będziemy używać następującej uproszczonej notacji: $M^\varphi = \langle W^\varphi, \mathcal{N}^\varphi, V^\varphi\rangle$. Z kolei $w \Vdash_\varphi \psi$ oznacza, że jesteśmy zainteresowani tylko tymi elementami W, które już akceptują φ.

Wymuszanie formuły postaci $[\varphi]\psi$ jest monotoniczne. Niech bowiem $w \Vdash [\varphi]\psi$. To znaczy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash_\varphi \psi\} = Y$. Zatem $V([\varphi]\psi) = \{x \in W; x \Vdash [\varphi]\psi\} = \{x \in W; \bigcap \mathcal{N}_x \subseteq Y\}$. Z $\rightarrow$-warunku otrzymujemy $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq V([\varphi]\psi)$.

Musimy udowodnić, że obiekty, które nazwaliśmy podmodelami, rzeczywiście nimi są.

Lemat 1.63. *Niech $M = \langle W, \mathcal{N}, V\rangle$ będzie* **in1** *-modelem. Wtedy $M^{\cap X} = \langle X \subseteq W, \mathcal{N}^{\cap X}, V^{\cap X}\rangle$, zdefiniowany jak wyżej, jest podmodelem M.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że istotnie mamy do czynienia z podstrukturą typu **in1** .

(1) $w \in \bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X}$. Istotnie: zauważmy, że $\bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} = \bigcap \mathcal{N}_w \cap X$ i z definicji $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$ oraz $w \in X$.
(2) $\bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} \in \mathcal{N}_w^{\cap X}$. To zachodzi z podobnych powodów.
(3) $v \in \bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} \Leftarrow \bigcap \mathcal{N}_v^{\cap X} \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w^{capX}$. Załóżmy, że $x \in \bigcap \mathcal{N}_v^{\cap X}$. Zatem $x \in \bigcap \mathcal{N}_v$.
(4) $\bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} \subseteq S \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w^{\cap X} \Rightarrow S \in \mathcal{N}_w^{\cap X}$. To jasne, że możemy napisać, iż $S = \bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} \cup Y$, $Y \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w^{\cap X}$. W takim razie $S = (\bigcap \mathcal{N}_w \cup Y) \cap X$. Ale $\bigcap \mathcal{N}_w \cup Y \in \mathcal{N}_w$.
(5) $v \in \bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_v^{\cap X} \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w^{\cap X}$. Załóżmy, że $x \in \bigcup \mathcal{N}_v^{\cap X}$. Zatem $x \in \bigcup \mathcal{N}_w \cap X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w \cap X = \bigcup \mathcal{N}_w^{\cap X}$.

Musimy się też upewnić, że $V^{\cap X}$ to istotnie wartościowanie, tzn., że jeżeli $w \in V^{\cap X}(q)$, to $\bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} \subseteq V^{\cap X}$. Niech więc $w \in V^{\cap X}$. Teraz $\bigcap \mathcal{N}_w^{\cap X} = \bigcap \mathcal{N}_w \cap X \subseteq V(q) \cap X = V^{\cap X}(q)$. Ta własność, w połączeniu z odpowiednimi własnościami otoczeń, gwarantuje nam też monotoniczność wymuszania formuł złożonych.

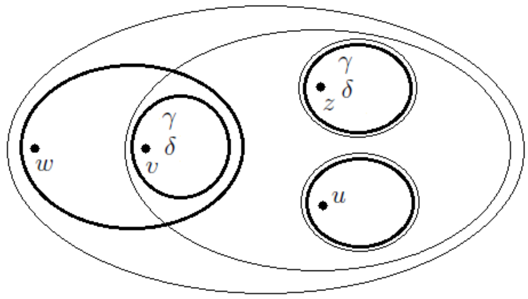
□

Nowy operator $[\cdot]$ nie jest bezużyteczny. Nietrudno wyobrazić sobie że pewne światy (odrzucające przy tym φ) "nie pozwalają" na to, by ψ zachodziła w świecie w - ale jeżeli "zgasimy" te światy i ograniczymy się tylko do tych, które akceptują φ, to również ψ zostanie wymuszona w w.

Rozważmy np. model $W = \{w, v, u, z\}$, w którym $\bigcap \mathcal{N}_w = \{w, v\}$, $\bigcup \mathcal{N}_w = \{W\}$, $\bigcap \mathcal{N}_v = \{v\}$, $\bigcup \mathcal{N}_v = \{v, u, z\}$, zaś dla u, z ich maksymalne i zarazem minimalne otoczenia to po prostu ich singletony. Przyjmijmy, że γ akceptowana jest tylko w v

[8]Nie rozważamy tu podmodeli typu $M^{\subseteq X}$ z funkcją $\mathcal{N}_w^{\subseteq X} = \{Y; Y = Z \subseteq X$, po wszystkich $Z \in \mathcal{N}_w\}$.

oraz z, tak samo δ. Nie możemy powiedzieć, że $v \Vdash \Box\delta$, bowiem u nie wymusza δ. Nie możemy zatem powiedzieć, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{x \in W; x \Vdash \gamma \Rightarrow x \Vdash \Box\delta\}$. Teraz jednak "wyłączmy" światy, które nie spełniają γ. Wtedy $\bigcup \mathcal{N}_v$ zamienia się w $\{v, z\}$, δ jest spełniona w każdym punkcie tego nowego v-otoczenia maksymalnego, zaś $v \Vdash_\gamma \Box\delta$. Zatem, $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{x \in W; x \Vdash \gamma \Rightarrow x \Vdash_\gamma \Delta\delta\}$, co oznacza, że $w \Vdash [\gamma]\Box\delta$.



Rysunek 8. O tym, dlaczego publiczne obwieszczanie nie jest trywialne.

Przykład powyższy mógłby zresztą być mniej skomplikowany: mogliśmy np. utożsamić v z w.

Zbierzmy teraz razem terminy, które dotychchczas się pojawiły.

Definicja 1.64. Rozważmy **in2**-model $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ oraz jego podmodel $M^{\cap X} = \langle X \subseteq W, \mathcal{N}^{\cap X}, V^{\cap X} \rangle$. Załóżmy, że standardowy język logiki $\mathbf{iKT}_\Box$ został wyposażony w operator $[\cdot]$, a wymuszanie formuły $[\varphi]\psi$ określone jest tak jak wcześniej. Powiemy, że M jest $\mathbf{in1}_{PAL}$-modelem.

Zachodzi następujący lemat:

Lemat 1.65. *Poniższe schematów i aksjomatów i reguły (które będziemy nazywać systemem $\mathbf{iKT}_\Box\, PAL$) są prawdziwe w każdym $\mathbf{in1}_{PAL}$-modelu.*

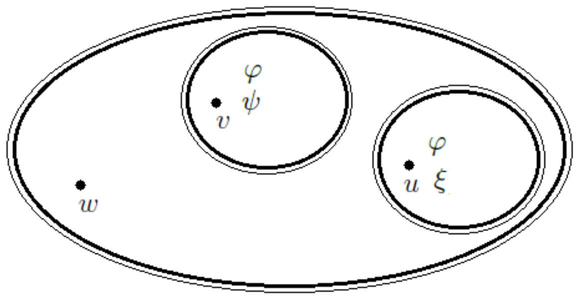
(1) *Wszystkie aksjomaty i reguły $\mathbf{iKT}_\Box$, w szczególności **IPC**, **K**, **T**, **MP** oraz **RN**.*
(2) $[\varphi]q \leftrightarrow (\varphi \to q)$.
(3) $[\varphi]\bot \leftrightarrow \neg\varphi$.
(4) $[\varphi](\psi \vee \xi) \leftrightarrow (\varphi \to ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi))$.
(5) $[\varphi](\psi \wedge \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi)$.
(6) $[\varphi] \leftrightarrow ([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi)$.
(7) $[\varphi]\Delta\psi \leftrightarrow (\varphi \to \Delta[\varphi]\psi)$.
(8) $\xi \to \psi \Rightarrow [\varphi]\xi \leftrightarrow [\varphi]\psi$ *(announcement rule, **AN**)*.

Dowód. Dowód to po prostu sprawdzenie, które pozostawiamy czytelnikowi. Procedura nie jest trudna, aczkolwiek trzeba pamiętać o specyfice nowych pojęć, w tym nowego operatora. □

Podkreślmy jeden detal. Otóż zauważmy, że czwarty aksjomat *to nie jest* $[\varphi](\psi \vee \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi)$. Ta formuła w ogólności nie jest prawdziwa. Uwidacznia to kontr-model na poniższej ilustracji.

Rzecz jasna $w \Vdash [\varphi](\psi \vee \xi)$, bo jeżeli $x \in \bigcap \mathcal{N}_w$ oraz $x \Vdash \varphi$, to $x = v$ lub $x = u$. W pierwszym przypadku, $x \Vdash \psi$, a wtedy $x \Vdash \psi \vee \xi$. Drugi przypadek jest analogiczny i wiedzie do tego samego wniosku. Z drugiej strony, $w \nVdash [\varphi]\psi$, gdyż $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$, $u \Vdash \varphi$ oraz $u \nVdash \psi$. Także $w \nVdash [\varphi]\xi$, a to ze względu na v.

Wykażemy teraz pełność logiki $\mathbf{iKT}_\Box\, PAL$ względem klasy wszystkich **in1**-struktur. Wpierw, w ślad za [6], zdefiniujemy *rozmiar* formuły i udowodnimy dwa lematy związane z tym pojęciem. Oba wzorowane są na odpowiednich twierdzeniach



RYSUNEK 9. Kontr-model dla $[\varphi](\psi \vee \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi)$.

z odnośnej pracy, z tym, że w pierwszym z nich prezentujemy dowód w szczegółowej formie.

Definicja 1.66. Rozmiarem formuły φ ($size(\varphi)$) określamy liczbę pojawień się się symboli w φ. Rozmiarem skończonego ciągu formuł $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ (tj. $size(\varphi_1, ..., \varphi_n)$) nazwiemy dodatnią liczbę naturalną postaci: $size(\varphi_1, ..., \varphi_n) = size(\varphi_1) + ... + size(\varphi_n) + n$.

Lemat 1.67. *Niech φ będzie formułą i niech ψ będzie formułą bez operatora PAL (PAL-wolną) taką, że $\varphi \leftrightarrow \psi \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Niech ξ również będzie formułą PAL-wolną. Wtedy istnieje kolejna formuła PAL-wolna, mianowicie Θ_ξ, taka, że $[\varphi]\xi \leftrightarrow \Theta \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Co więcej, jeżeli ψ i ξ są $\Box$-wolne (bez operatora $\Box$), to również Θ jest $\Box$-wolna.*

Dowód. Dowód to indukcja po budowie formuły, oparta o $size(\xi)$. Załóżmy, że ξ jest PAL-wolną formułą taką, że dla wszystkich PAL-wolnych formuł μ zachodzi zależność: jeżeli $size(\mu) < size(\xi)$, to μ posiada wszystkie własności, których oczekujemy w tezie lematu, tj. istnieje PAL-wolna Θ_μ taka, że $[\varphi]\xi \leftrightarrow \Theta_\mu \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Przy tym Θ_μ jest $\Box$-wolna, jeżeli ψ i μ są $\Box$-wolne.

(1) $\xi := q$. Na podstawie odpowiedniego aksjomatu piszemy, że $[\varphi]q \leftrightarrow (\varphi \to q) \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Możemy rzec, iż $\Theta_q = \varphi \to q$.
(2) $\xi := \alpha \wedge \beta$. Zauważmy, że $size(\alpha) < size(\xi)$ an $size(\beta) < size(\xi)$. Z odpowiedniego aksjomatu $[\varphi](\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow ([\varphi]\alpha \wedge [\varphi]\beta) \leftrightarrow (\Theta_\alpha \wedge \Theta_\beta) \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Ta ostatnia formuła może być postrzegana jako $\Theta_{\alpha\wedge\beta}$.
(3) $\xi := \alpha \vee \beta$. Z odpowiedniego aksjomatu: $[\varphi](\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\varphi \to [\varphi]\alpha \vee [\varphi]\beta) \leftrightarrow (\psi \to \Theta_\alpha \vee \Theta_\beta) \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Ta ostatnia formuła to $\Theta_{\alpha\vee\beta}$.
(4) $\xi := \alpha \to \beta$. Mamy $[\varphi](\alpha \to \beta) \leftrightarrow ([\varphi]\alpha \to [\varphi]\beta) \leftrightarrow (\Theta_\alpha \to \Theta_\beta) \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. W ten sposób otrzymaliśmy $\Theta_{\alpha\to\beta}$.
(5) $\xi := \Box\alpha$. Mamy: $[\varphi]\Box\alpha \leftrightarrow (\varphi \to \Box[\varphi]\alpha) \leftrightarrow (\psi \to \Box\Theta_\alpha) \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Ostatnia formuła to nasza $\Theta_{\Box\alpha}$.

$\Box$

Lemat 1.68. *Dla każdej formuły φ istnieje PAL-wolna formuła ψ taka, że $\varphi \leftrightarrow \psi \in$ **iKT**$_\Box$ PAL. Co więcej, jeżeli φ jest $\Box$-wolna, to również ψ jest $\Box$-wolna.*

Dowód. Dowód ponownie ma charakter indukcyjny i korzysta z pojęcia $size(\varphi)$. Załóżmy mianowicie, że φ to taka formuła, że dla wszystkich formuł μ zachodzi zależność: jeżeli $size(\mu) < size(\varphi)$, to μ posiada oczekiwane własności, tj. istnieje pewna PAL-wolna formuła ψ_μ ($\Box$-wolna, jeżeli μ taka jest) taka, że $\varphi \leftrightarrow \psi \in$ **iKT**$_\Box$ PAL.

Przypadki PAL-wolne są klarowne (naszym ψ może być po prostu φ). Rozważmy zatem $\varphi := [\mu]\xi$. Jak widzimy, $size(\mu) < size(\varphi)$, zresztą tak samo jest dla $size(\xi)$. Istnieją zatem Θ_μ oraz Θ_ξ takie, że $\mu \leftrightarrow \Theta_\mu \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$ oraz $\xi \leftrightarrow \Theta_\xi \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$. Na mocy odpowiedniego aksjomatu wnosimy, że $[\mu]\xi \leftrightarrow [\mu]\Theta_\xi \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$. Niech teraz β będzie PAL-wolną formułą taką, że $[\mu]\Theta_\xi \leftrightarrow \beta \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$. Istnieje ona na mocy poprzedniego lematu, bo $\mu \leftrightarrow \Theta_\mu \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$. W takim razie $[\mu]\xi \leftrightarrow \beta \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$.

□

Ostatnią kwestią jest dowód pełności:

Twierdzenie 1.69. *Logika* $\mathbf{iKT}_\Box PAL$ *jest pełna względem klasy wszystkich* $\mathbf{in1}_{PAL}$*-modeli. A zatem, jeżeli* φ *jest prawdziwa w każdym* $\mathbf{in1}_{PAL}$*-modelu, then* φ *jest twierdzeniem* $\mathbf{iKT}_\Box PAL$.

Dowód. Załóżmy, że φ jest prawdziwa, ale nie należy do $\mathbf{iKT}_\Box PAL$. Można wziąć teraz PAL-wolną ψ taką, że $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{iKT}_\Box PAL$. Oczywiście $\psi \notin \mathbf{iKT}_\Box PAL$. Można ją więc obalić z uwagi na pełność logiki $\mathbf{iKT}_\Box$ (ψ jest przecież PAL-wolna). Ale (z przystosowania $\mathbf{iKT}_\Box PAL$ do naszej semantyki) formuła $\varphi \leftrightarrow \psi$ jest prawdziwa. Zatem φ nie może być prawdziwa (gdyż ψ taka nie jest). To jednak sprzeczność. □

1.4. **Pewne przypadki klasyczne.**

1.4.1. *Intuicja i motywacja.* Jeśli świat możliwy potraktować jako kogoś, kto *rozprzestrzenia* pewną informację (formułę), to wówczas semantyki otoczeniowe z minimalnymi i maksymalnymi otoczeniami modelują sytuację, w której taki nadawca komunikatu ma najmniejszy, niejako gwarantowany krąg odbiorców - oraz krąg drugi, maksymalny. W przypadku intuicjonistycznym już samo "wypowiedzenie" formuły w świecie narzuca ją odbiorcom z otoczenia minimalnego (przez monotoniczność). Nie jest to do końca oczywiste założenie, stąd uznaliśmy, że wypada również rozważyć sytuację, w której minimalnemu otoczeniu odpowiada odrębna modalność, a wymuszanie formuł nie jest monotoniczne. Należy tu przyznać, że na podobny pomysł wpadli (i zrealizowali go bi-relacyjnie oraz przy aksjomatyzacji równoważnej z naszą, acz formalnie nieco innej) Božić i Došen w [12], wychodząc od czysto matematycznej czy też logicznej refleksji nad możliwością połączenia w jednym systemie dwóch konieczności: jednej zaczerpniętej z **S4** i drugiej z **K**. Jako że nie rościmy tu sobie prawa do pierwszeństwa, to materiał przedstawimy raczej skrótowo.

1.4.2. *Szczegóły techniczne.* Nasza podstawowa struktura to **cn1**-struktura, zdefiniowana jak poniżej:

Definicja 1.70. **cn1**-struktura to para uporządkowana $\langle W, \mathcal{N}\rangle$, w której:
(1) W to zbiór niepusty.
(2) $\mathcal{N}$ to funkcja z W w $P(P(W))$ taka że:
  (a) $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$.
  (b) $\bigcap \mathcal{N}_w \in \mathcal{N}_w$.
  (c) $X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ oraz $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w$.

Mając *frame*, budujemy model:

Definicja 1.71. **cn1**-model to trójka $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$, w której $\langle W, \mathcal{N}\rangle$ to **cn1**-struktura, zaś V to funkcja z PV w $P(W)$.

Definicja 1.72. Wymuszanie formuł w świecie $w \in W$ zdefiniowane jest indukcyjnie, przy czym:
(1) $w \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow w \nVdash \varphi$ lub $w \Vdash \psi$.
(2) $w \Vdash \blacksquare\varphi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi\}$.

(3) $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \bigcup\mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi\}$.

Poniższa aksjomatyzacja jest bazą dla kilku dalszych systemów:

Definicja 1.73. Definiujemy logikę **CL1** jako następujący zbiór reguł i formuł: **CPC** $\cup$ { $K_{\blacksquare}$, $T_{\blacksquare}$ $RN_{\blacksquare}$, K , T , RN , $\Box$**N**, MP }, gdzie **CPC** to schematy aksjomatów logiki klasycznej, zaś $\Box$**N** to $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$.

Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1.74. **CL1** *jest przystosowana do klasy wszystkich* **cn1** *-modeli.*

Model kanoniczny budujemy w następujący sposób:

Definicja 1.75. Definiujemy **can-cn1** (kanoniczny **cn1** -model) jako trójkę $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$, w której W, $\mathcal{N}$ i V zdefiniowane są jak poniżej:

(1) W to zbiór wszystkich teorii (relatywnie) maksymalnych logiki **CL1** .
(2) Funkcja otoczeniowa to przekształcenie $\mathcal{N} : W \to P(P(W))$ takie, że:
$X \in \mathcal{N}_w \Leftrightarrow \bigcap\mathcal{N}_w \subseteq X \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$, gdzie:
(a) $\bigcap\mathcal{N}_w = \{v \in W : \blacksquare\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in v\}$.
(b) $\bigcup\mathcal{N}_w = \{v \in W : \Box\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in v\}$.
(3) Wartościowaniem jest funkcja $V : PV \to P(W)$ taka, że $w \in V(q) \Leftrightarrow q \in w$.

Łatwo pokazać, że to rzeczywiście **cn1** -model. Następnie można dowieść twierdzenia:

Twierdzenie 1.76. *Jeżeli* $\langle W, \mathcal{N}, V\rangle$ *to* **can-cn1** *, to dla każdego* $w \in W$ *mamy równoważność:* $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in w$.

Rozważmy dodatkowo następujące systemy:

(1) **CL2** = **CL1** $\cup \{\Box\varphi \to \blacksquare\Box\varphi\}$.
(2) **CL3** = **CL1** $\cup \{\Box\varphi \to \Box\blacksquare\varphi\}$.
(3) **CL4** = **CL1** $\cup \{\blacksquare\varphi \to \blacksquare\blacksquare\varphi\}$.
(4) **CL5** = **CL1** $\cup \{\Box\varphi \to \Box\Box\varphi\}$.

Można pokazać, że każdy z tych systemów jest pełny względem pewnej podklasy **cn1** -struktur. Te podklasy wyróżniane są przy pomocy *sfc* (*specific frame conditions*, tj. specyficznych warunków). Warunki te - odpowiednio dla każdej z podanych wyżej logik - wyglądają następująco:

(1) **CL2** ; sfc: $v \in \bigcap\mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup\mathcal{N}_v \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$
(2) **CL3** ; sfc: $v \in \bigcup\mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap\mathcal{N}_v \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$
(3) **CL4** ; sfc: $v \in \bigcap\mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap\mathcal{N}_v \subseteq \bigcap\mathcal{N}_w$
(4) **CL5** ; sfc: $v \in \bigcup\mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup\mathcal{N}_v \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$

Warunki te można oczywiście łączyć, równolegle uzupełniając kolekcję aksjomatów. Jest to istotne dlatego, że można opracować translację, która przeprowadza formuły $\mathbf{iKT}_{\Box}$ w formuły systemu **CL2.4** .

Definicja 1.77. Niech $\varphi \in \mathbf{iKT}_{\Box}$. Translację $(.)^*$ z $\mathbf{iKT}_{\Box}$ w **CL2.4** definiujemy tak:

(1) $q \in PV \Rightarrow \varphi^* := \Box q$.
(2) $\varphi := \gamma \wedge \delta \Rightarrow \varphi^* := \gamma^* \wedge \delta^*$.
(3) $\varphi := \gamma \vee \delta \Rightarrow \varphi^* := \gamma^* \vee \delta^*$.
(4) $\varphi := \gamma \to \delta \Rightarrow \varphi^* := \blacksquare(\gamma^* \to \delta^*)$.
(5) $\varphi := \Box\gamma \Rightarrow \varphi^* := \varphi$.

Przy jej pomocy można wykazać następujące twierdzenie (którego dowód bazuje na rozumowaniu odnoszącym się do standardowej translacji Tarskiego, dlatego prezentujemy jedynie zarys):

Twierdzenie 1.78. *Formuła φ jest tautologią* **iKT**$_\Box$ $\Leftrightarrow$ φ^* *jest tautologią* **CL2.4** .

Dowód. ($\Rightarrow$)

Przypuśćmy, że $\varphi \in$ **iKT**$_\Box$, ale $\varphi^* \notin$ **CL2.4** . Istnieje zatem **cn2.4** -model $M = \{W, \mathcal{N}, V\}$ taki, że $w \nVdash \varphi^*$ dla pewnego $w \in W$.

Budujemy **in1** -model $\overline{M} = \{\overline{W}, \overline{\mathcal{N}}, \overline{V}\}$. Zakładamy, że każdy $v \in W$ ma swój odpowiednik $\overline{v} \in \overline{W}$ taki, że:

(1) $\overline{v} \Vdash q \Leftrightarrow v \Vdash \Box q$, dla każdej $q \in PV$.
(2) $\bigcap \mathcal{N}_{\overline{v}} = \{\overline{u} \in \overline{W}; u \in \bigcap \mathcal{N}_v\}$.
(3) $\bigcup \mathcal{N}_{\overline{v}} = \{\overline{u} \in \overline{W}; u \in \bigcup \mathcal{N}_v\}$.

Pominiemy tu sprawdzenie tego, że istotnie jest to **in1** -model. Istotą jest pokazanie, że dla każdej $\gamma \in$ **iKT**$_\Box$ i dla każdego $v \in W$ mamy:

$\overline{v} \Vdash \gamma \Leftrightarrow v \Vdash \gamma^*$.

Dowód prowadzony jest indukcyjnie (po złożoności formuły). Niech $\gamma := \xi \to \delta$. Możemy napisać:

$\overline{v} \Vdash \xi \to \delta \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_{\overline{v}} \subseteq \{\overline{u} \in \overline{W}; \overline{u} \nVdash \xi$ lub $\overline{u} \Vdash \delta\} \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \{u \in W; u \nVdash \xi^*$ lub $u \Vdash \delta^*\} \Leftrightarrow v \Vdash \Box(\xi^* \to \delta^*) \Leftrightarrow v \Vdash \gamma^*$.

Niech teraz $\gamma := \Box\xi$. Wtedy:

$\overline{v} \Vdash \Box\xi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}_{\overline{v}} \subseteq \{\overline{u} \in \overline{W}; u \Vdash \xi\} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \{u \in W; u \Vdash \xi\} \Leftrightarrow v \Vdash \Box\xi \Leftrightarrow v \Vdash \gamma^*$.

Zatem z założenia, że istnieje pewien **cn2.4** -model M falsyfikujący φ wynikło nam, że istnieje również intuicjonistyczno-modalny model obalający φ (bo $\overline{w} \nVdash \varphi$). To sprzeczność, bo założyliśmy, że φ jest tautologią **iKT**$_\Box$.

($\Leftarrow$)

Teraz rozważmy φ taką, że $\varphi \notin$ **iKT**$_\Box$, ale $\varphi^* \in$ **CL2.4** . Mamy zatem pewien **in1** -model $\overline{M} = \{\overline{W}, \overline{\mathcal{N}}, \overline{V}\}$ ze światem $\overline{w} \in \overline{W}$ takim, iż $\overline{w} \nVdash \varphi$. Zbudujmy teraz model **cn2.4** , mianowicie $M = \{W, \mathcal{N}, V\}$:

(1) $v \Vdash q \Leftrightarrow \overline{v} \Vdash q$, dla każdej $q \in PV$.
(2) $\bigcap \mathcal{N}_v = \{u \in W; \overline{u} \in \bigcap \mathcal{N}_{\overline{v}}\}$.
(3) $\bigcup \mathcal{N}_v = \{u \in W; \overline{u} \in \bigcup \mathcal{N}_{\overline{v}}\}$.

Dla każdej $\gamma \in$ **iKT**$_\Box$ i każdej $v \in W$ mamy:

$v \Vdash \gamma^* \Leftrightarrow \overline{v} \Vdash \gamma$.

Dla zmiennych zdaniowych:

$v \Vdash q^* \Leftrightarrow v \Vdash \Box q \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \{u \in W; u \Vdash q\} \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_{\overline{v}} \subseteq \{\overline{u} \in \overline{W}; \overline{u} \Vdash q\} \Leftrightarrow \overline{v} \Vdash q$ (z monotoniczności wymuszania w otoczeniach minimalnych).

Niech $\gamma := \xi \to \delta$. Wtedy:

$v \Vdash \gamma^* \Leftrightarrow v \Vdash \Box(\xi^* \to \delta^*) \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \{u \in W; u \nVdash \xi^*$ lub $u \Vdash \delta^*\} \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_{\overline{v}} \subseteq \{\overline{u} \in \overline{W}; \overline{u} \nVdash \xi$ lub $\overline{u} \Vdash \delta\} \Leftrightarrow \overline{v} \Vdash \xi \to \delta \Leftrightarrow \overline{v} \Vdash \gamma$.

Dla $\gamma := \Box\xi$ rozumowanie jest podobne, a nawet krótsze.

$\Box$

Na koniec zauważmy, że jeśli dodamy $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ do **iKT**$_\Box$ (co odpowiada warunkowi $v \in \bigcup \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$), to wówczas nasza translacja będzie prowadzić z **iS4**$_\Box$ w **CL2.4.5** .

2. Badania nad semantyką topologiczną w kontekście $\mathbf{iKT}_{\Box}$

2.1. Zarys koncepcji. W poprzedniej części rozprawy przekonaliśmy się, że nasza semantyka otoczeniowa dla $\mathbf{iKT}_{\Box}$ tłumaczy się w prosty sposób na semantykę bi-relacyjną. Wbrew pozorom, nie jest to jednak deprymujące. Otóż wybór semantyki (jednej spośród kilku równoważnych) zależy od tego, która pojęciowość wydaje się badaczowi wygodniejsza i bardziej intuicyjna. Co więcej, tenże wybór może prowokować pewne skojarzenia, które doprowadzą do dalszych odkryć - a skojarzenia te być może nie pojawiłyby się w tak naturalny sposób, gdybyśmy korzystali z innych, choć punktowo równoważnych modeli.

Dla przykładu: sądzimy, że w obliczu dość prostych warunków, jakie nałożyliśmy na **in1**-struktury, myślenie w kategoriach minimalnych i maksymalnych otoczeń jest bardziej przejrzyste niż posługiwanie się rozmaitymi kombinacjami $\leqslant$ i R (choć formalnie to oczywiście to samo). W istocie pomysły tej części pracy wynikają właśnie z wychwycenia pewnych (choćby wizualnych) analogii pomiędzy otoczeniami a zbiorami otwartymi.

Topologiczna semantyka dla intuicjonistycznych logik modalnych badana była m.in. przez Davoren i in. w [37], [38] i [39]. W pracach tych korzystano ze struktur bi-relacyjnych, które spełniają aksjomaty Fischer Servi. Autorzy wprowadzili specyficzne, dodatkowe relacje binarne pomiędzy punktami przestrzeni topologicznej.

Inny pomysł został przedstawiony przez Collinsona i in. w [26]. Tam skorzystano z pojęcia topologicznego p-morfizmu, a także ze struktur relacyjnych i pewnych metod teorii kategorii. Jeśli chodzi o topologiczne p-morfizmy (lub bisymulacje), to tutaj ich nie używamy, natomiast narzędzia takie zostaną wprowadzone w kolejnej części rozprawy w odniesieniu do uogólnionych topologii.

W pracy Sotirova [125] znajdujemy, obok szerokiej klasyfikacji rozmaitych struktur otoczeniowych i relacyjnych, także modele topologiczne dla logik modalnych opartych o intuicjonizm. Sotirov przyjął, że jego przestrzenie wyposażone są w dwie operacje: jedna pełni rolę wnętrza i jest odpowiedzialna za intuicjonistyczny aspekt logiki, druga modeluje konieczność.

Nasz podejście jest nieco inne. Wyszliśmy z obserwacji, iż kolekcje otoczeń przypisane do poszczególnych światów (w **in2**-strukturach) w pewnym sensie przypominają osobne przestrzenie topologiczne w swego rodzaju "meta-uniwersum". Te przestrzenie mogą wchodzić ze sobą w pewne interakcje, tzn. kroić się niepusto, co ma pewien wpływ na wymuszanie formuł. W istocie jednak w niektórych wypadkach konieczne okazało się potraktowanie maksymalnych otoczeń jak podprzestrzeni jednej przestrzeni topologicznej, obejmującej całe wspomniane "meta-uniwersum".

Pomysły wprowadzone w tej części rozprawy nie mają charakteru systematycznej teorii: to raczej prezentacja trzech rodzajów transformacji pomiędzy określonymi semantykami. Uważamy jednak, że od strony technicznej rozwiązania te są dość zgrabne, a i sama idea "semantyki multi-topologicznej", nawet jeśli w bazowej postaci zbyt ogólna, skłania do pewnych dalszych refleksji. Wreszcie, ujmując rzecz w skrócie, otrzymujemy tu pewną namiastkę struktur topologicznych dla logiki $\mathbf{iKT}_{\Box}$, słabszej wszak niż kompozycja intuicjonizmu i **S4**.

2.2. Struktury multi-topologiczne.

2.2.1. *Podstawowe definicje.* Jak wspomnieliśmy we wstępie, przez *strukturę multi-topologiczną* rozumieć będziemy kolekcję przestrzeni topologicznych (tzn. kolekcję uniwersów, z których każde ma własną topologię w zwykłym sensie). Nałożymy na tę konstrukcję pewne ograniczenia, a do tego wprowadzimy wartościowanie bazujące na zbiorach otwartych. Głównym ograniczeniem jest przyjęcie, iż każda z naszych przestrzeni zawiera pewien *zbiór wyróżniony.*

Definicja 2.1. Definiujemy **mtD**-model ze zbiorami wyróżnionymi jako trójkę $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t \rangle$, w której:

(1) $W \neq \emptyset$.
(2) $\mathfrak{W} = \{\langle T, \tau, D^\tau \rangle : T \subseteq W,\ \tau$ jest topologią na T, $D^\tau \in \tau, D^\tau \neq \emptyset\}$.
(3) $W = \bigcup \mathcal{T}$, where $\mathcal{T} = \{T : \langle T, \tau, D^\tau \rangle \in \mathfrak{W}\}$.
(4) V_t jest funkcją z PV w $P(W)$, która spełnia warunek: $V_t(q) = \bigcup \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} \subseteq \{X \subseteq W$; istnieje $\langle T, \tau, D^\tau \rangle \in \mathfrak{W}$ dla którego $X \in \tau\}$.

Warunek trzeci możemy sformułować następująco: dla każdego $w \in W$ istnieje $\langle T, \tau, D^\tau \rangle \in \mathfrak{W}$ taka, że $w \in T$. To znaczy: każdy punkt W jest przynajmniej w jednej przestrzeni topologicznej. Cała tę strukturę możemy też traktować jako uniwersum wyposażone w wiele (sumujących się do W) topologii uogólnionych w sensie Császára (aczkolwiek spełniających warunek domknięcia na skończone przekroje).

Dla prostoty będziemy często utożsamiać każdy $\langle T, \tau, D^\tau \rangle$ po prostu z τ (i np. przyjmować, jak w poniższej definicji, że rozważane T odnosi się do rozważanej właśnie topologii τ). Wartościowanie formuł złożonych jest zdefiniowane indukcyjnie:

Definicja 2.2. Dla każdego **mtD**-modelu $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t \rangle$ i dla każdej formuły φ:

(1) $V_t(\varphi \wedge \psi) = V_t(\varphi) \cap V_t(\psi)$.
(2) $V_t(\varphi \vee \psi) = V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$.
(3) $V_t(\varphi \to \psi) = \bigcup_\tau Int_\tau \left(-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)\right)$.
(4) $V_t(\Box\varphi) = \bigcup \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq W;\ X = D^\tau$ dla przynajmniej jednej τ w $\mathfrak{W}$ takiej, że $T \subseteq V_t(\varphi)\}$.

A zatem zakładamy, że $V_t(q)$ to suma pewnej liczby zbiorów, które są otwarte przynajmniej według jednej z topologii. Jeśli chodzi o wartościowanie implikacji, to szukamy $-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$, a potem sumujemy wszystkie wnętrza tego zbioru (po wszystkich τ). W odniesieniu do modalności sprawdzamy najpierw, które uniwersa są zawarte w $V_t(\varphi)$, a potem sumujemy ich zbiory wyróżnione.

Mówimy, że formuła φ jest *prawdziwa*, jeżeli w każdym **mtD**-modelu $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t \rangle$ mamy $V_t(\varphi) = W$.

2.2.2. *Problemy i ich rozwiązanie.* Okazuje się jednak, że nasza definicja wartościowania formuł jest zbyt słaba: to znaczy **mtD**-struktury w najogólniejszej swej postaci nie są przystosowane do intuicjonizmu. Nie mamy dokładnej hipotezy na temat logiki wyznaczanej przez tak szeroką klasę. Z pewnością prawdziwe są niektóre bardzo podstawowe aksjomaty. Wśrod nich mamy np. $\varphi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to \varphi \vee \psi$ oraz $\psi \to \varphi \vee \psi$. Także $\varphi \to (\psi \to \psi)$ jest prawdziwy. Sprawdźmy to. Przyjmijmy, że istnieje model z takim światem w, że $w \not\Vdash \varphi \to (\psi \to \psi)$. Zatem dla każdej τ, $w \notin Int_\tau(-V_t(\varphi) \cup (-V_t(\psi) \cup V_t(\varphi)))$. Ale całe wyrażenie w nawiasach to po prostu $W \cup -V_t(\psi) = W$. Gdy weźmiemy τ-wnętrze W, otrzymamy po prostu T. Zatem w znajduje się poza *każdym* T. To jednak sprzeczność.

Z drugiej strony, jest możliwe, że $x \not\Vdash (\varphi \to \psi \wedge \psi \to \gamma) \to (\varphi \to \gamma)$, tj., że dla każdej τ, $x \notin Int_\tau(-(-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)) \cap (-V_t(\psi) \cup V_t(\gamma))) \cup (-V_t(\varphi) \cup V_t(\gamma))$. Po pewnych przeliczeniach wyrażenie to można bowiem zapisać jako $-W \cup (-V_t(\varphi) \cup V_t(\gamma)) = -V_t(\varphi) \cup V_t(\gamma)$. Weźmy teraz $W = \{w, v, u, z\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{w, v\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{u, z\}\}$, $V_t(\varphi) = \{w, v\}$, ustalmy zbiory wyróżnione w sposób dowolny i przyjmijmy $V_t(\varphi) = \{u, z\}, V_t(\psi) = V_t(\gamma) = \emptyset$. Teraz v nie wymusza rozważanej formuły. Sprawdźmy to: $Int_{\tau_1}(-V_t(\varphi) \cup V_t(\gamma)) = Int_{\tau_1}(\{u, z\}) = \emptyset \not\ni v$. Co więcej, $Int_{\tau_2}(-V_t(\varphi) \cup V_t(\gamma)) = \{u, z\} \not\ni v$.

Możemy też zbudować kontrmodel, w którym $V_t(\varphi \wedge \psi) \nsubseteq V_t(\top \to \varphi \wedge \psi)$ [9].

[9] Jesteśmy wdzięczni anonimowemu recenzentowi z BoSL za ten przykład.

Co do formuł modalnych: łatwo można udowodnić, że T (czyli $\Box\varphi \to \varphi$) jest zawsze prawdziwy. Przypuśćmy bowiem, że istnieje model z takim światem w, że $w \nVdash T$. To znaczy, dla każdej τ, $w \notin Int_\tau(-V_t(\Box\varphi) \cup V_t(\varphi)) = Int_\tau(-\bigcup\mathcal{X} \cup V_t(\varphi))$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq W; X = D^\tau$ dla przynajmniej jednej τ w $\mathfrak{W}$ takiej, że $T \subseteq V_t(\varphi)\}$. Tak więc $\bigcup\mathcal{X} \subseteq V_t(\varphi)$. Zatem $-V_t(\varphi) \subseteq -\bigcup\mathcal{X}$, co daje nam, że $-\bigcup\mathcal{X} \cup V_t(\varphi) = W$. Jak poprzednio, dochodzimy do niemożliwego wniosku, że $w \notin T$ dla każdej $\langle T, \tau, D^\tau\rangle \in \mathfrak{W}$.

Z drugiej strony, aksjomat *4* (czyli $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$) może zostać obalony. Weźmy $W = \{w, v, u\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{w, v\}, \{w, v, u\}\}$, $D^{\tau_1} = \{w, v\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{v\}\}$, $D^{\tau_2} = \{v\}$, $V_t(\varphi) = W$. Teraz $V_t(\Box\varphi) = D^{\tau_1} \cup D^{\tau_2} = \{w, v\}$, $V(\Box\Box\varphi) = D^{\tau_2} = \{v\}$, $-V_t(\Box\varphi) \cup V_t(\Box\Box\varphi) = \{u, v\}$. Zatem $Int_{\tau_1}(\{u, v\}) = \emptyset$, $Int_{\tau_2}(\{u, v\}) = \{v\}$. Rzecz jasna u jest poza tymi wnętrzami, czyli $u \nVdash 4$.

Mamy zatem do czynienia z semantyką dla pewnej (nieznanej) subintuicjonistycznej logiki modalnej. Podejrzewamy, że badanie takich struktur może być owocne (zapewne przy założeniu istnienia pewnych "regularności", przez co należy rozumieć zarówno wzajemne położenie i zawieranie się przestrzeni w naszym "multiwersum", jak i ich własności topologiczne). Zwracamy uwagę na ten kierunek, zasadniczo jednak jest on poza zakresem niniejszej rozprawy. Z tego powodu na razie będziemy pracować jedynie z pewną podklasą naszych struktur, mianowicie z tzw. **i-mtD**-strukturami.

Definicja 2.3. Powiemy, że **mtD**-struktura jest **i-mtD** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka topologia Aleksandrowa μ na W, że dla każdej $\tau \in \mathfrak{W}$, τ jest topologią indukowaną przez μ.

W topologii Aleksandrowa *dowolne* (a nie tylko skończone) przekroje rodzin zbiorów otwartych są otwarte. Jeśli τ na T jest indukowana przez μ, to każdy zbiór $U \in \tau$ może być zapisany jako $T \cap A$ dla pewnego $A \in \mu$. Z drugiej strony, jeśli $A \in \mu$, to $T \cap A \in \tau$. Ta podklasa modeli jest przystosowana do intuicjonizmu. Wiadomo też, że podprzestrzenie przestrzeni Aleksandrowa dziedziczą własność Aleksandrowa (por. Twierdzenie 7 w [126]).

2.3. **Od struktur otoczeniowych do multi-topologicznych.** Pokażemy, że nasze **in2**-modele (z pierwszej części rozprawy) można traktować jako multi-topologiczne. Wprowadźmy wpierw w nich pojęcie zbiorów w-otwartych.

Definicja 2.4. Powiemy, że $X \subseteq W$ jest w-otwarty w **in2**-strukturze, jeżeli $X \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$ i dla każdego $v \in X$ mamy $\bigcap\mathcal{N}_v \subseteq X$. Definiujemy $\mathcal{U}_w$ jako $\{X \subseteq W : X$ są w-otwarte$\}$ i nazywamy tę rodzinę w-topologią.

Pokażmy, że ta definicja istotnie wyznacza topologię.

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że mamy* **in2**-*strukturę* $F_\mathcal{N} = \langle W, \mathcal{N}\rangle$. *Wtedy* $\mathcal{U}_w$ *to przestrzeń topologiczna (dla każdego* $w \in W$*).*

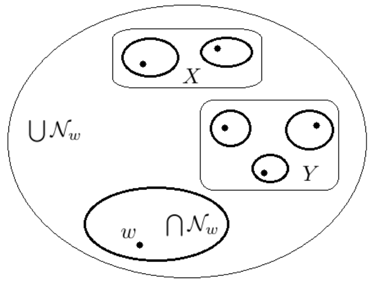
Dowód. Sprawdźmy standardowe warunki topologii.

(1) Rozważmy zbiór pusty. Otóż $\emptyset \in \mathcal{U}_w$, gdyż $\emptyset \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$ i nie ma żadnych v w $\emptyset$.
(2) Rozważmy $\bigcup\mathcal{N}_w$. Zbiór ten oczywiście zawiera się w sobie, a ze względu na t-warunek mamy, że dla każdego $v \in \bigcup\mathcal{N}_w$ jest prawdą, iż $\bigcap\mathcal{N}_v \subseteq \bigcup\mathcal{N}_w$.
(3) Rozważmy $\mathscr{X} \subseteq \mathcal{U}_w$. Pokażmy, że $\bigcap\mathscr{X} \in \mathcal{U}_w$. Każdy element $\mathscr{X}$ należy do $\mathcal{U}_w$, zatem jest zawarty w $\bigcup\mathcal{N}_w$. To samo zachodzi oczywiście dla przecięcia tych elementów.

    Niech teraz $v \in \bigcap\mathscr{X}$. Z definicji $\bigcap\mathcal{N}_v \subseteq X$ dla każdego $X \in \mathscr{X}$. Wtedy $\bigcap\mathcal{N}_v \subseteq \bigcap\mathscr{X}$.

(4) Zajmijmy się dowolnymi sumami. Przypuśćmy, że $\mathscr{X} \subseteq \mathcal{U}_w$ i rozważmy $\bigcup \mathscr{X}$. Suma ta zawarta jest w $\bigcup \mathcal{N}_w$. Weźmy teraz dowolny $v \in \bigcup \mathscr{X}$. Wiemy, że $\bigcap \mathcal{N}_v \subseteq X$ dla pewnego $X \in \mathscr{X}$ (w istocie nawet dla *każdego* X zawierającego v). Wtedy $\bigcap \mathcal{N}_v \subseteq \bigcup \mathscr{X}$.

□



RYSUNEK 10. Topologia $\mathcal{U}_w$. Zbiory X, Y są w-otwarte.

Ewidentnie użyliśmy t-warunku (charakterystycznego dla **in2**-struktur), aby zagwarantować sobie, że całe maksymalne w-otoczenie jest w-otwarte. Potraktowanie na sposób (multi)topologiczny **in1**-struktur byłoby natomiast co najmniej problematyczne.

Teraz mamy następujące twierdzenie związane z indukowaniem topologii i podprzestrzeniami:

Twierdzenie 2.6. *Załóżmy, że mamy* **in2**-*strukturę* $M_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}, V_{\mathcal{N}} \rangle$ *i definiujemy topologię* μ *na* W *następująco: jeżeli* $A \subseteq W$, *to* $A \in \mu \Leftrightarrow$ *dla każdego* $v \in A$, $\bigcap \mathcal{N}_v \subseteq A$. *Wtedy dla każdego* $w \in W$, *topologia* $\mathcal{U}_w$ *z Def. 2.4 jest indukowana przez* μ.

Dowód. Niech $w \in W$. Pokażemy, że $\mathcal{U}_w$ składa się dokładnie z przekrojów $\bigcup \mathcal{N}_w$ i zbiorów μ-otwartych.

Jeżeli $U \in \mathcal{U}_w$, to $U \in \mu$ (to jasne) oraz $U = U \cap \bigcup \mathcal{N}_w$. Załóżmy, że A jest μ-otwarty i rozważmy $Z = A \cap \bigcup \mathcal{N}_w$. Sprawdźmy, że ten zbiór należy do $\mathcal{U}_w$. Jest niewątpliwie zawarty w $\bigcup \mathcal{N}_w$. Załóżmy teraz, że istnieje taki $z \in Z$ dla którego $\bigcap \mathcal{N}_z \nsubseteq Z$. Ale $\bigcap \mathcal{N}_z \subseteq A$ (bo A jest μ-otwarty) oraz $\bigcap \mathcal{N}_z \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ (z uwagi na t-warunek). To sprzeczność. □

Dodatkowo można łatwo pokazać, że μ jest topologią Aleksandrowa. My natomiast przejdziemy do punktowej równoważności.

Twierdzenie 2.7. *Dla każdego* **in2**-*modelu* $M_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}, V_{\mathcal{N}} \rangle$ *istnieje* **i-mtD**-*model* $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t \rangle$, *który jest punktowo równoważny z* $M_{\mathcal{N}}$, *tzn.* $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow w \in V_t(\varphi)$.

Dowód. Załóżmy, że mamy $M_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}, V_{\mathcal{N}} \rangle$. Rozważmy strukturę $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t \rangle$, w której:

(1) $\mathfrak{W} = \{\langle \bigcup \mathcal{N}_w, \mathcal{U}_w, \bigcap \mathcal{N}_w \rangle; w \in W\}$.
(2) dla każdego $q \in PV$, $V_t(q) = V_{\mathcal{N}}(q)$.

Każdą przestrzeń $\langle \bigcup \mathcal{N}_w, \mathcal{U}_w, \bigcap \mathcal{N}_w \rangle$ utożsamimy po prostu z $\mathcal{U}_w$. Łatwo sprawdzić, że mamy teraz do czynienia z **i-mtD**-strukturą. Dla każdego $w \in W$ traktujemy $\bigcup \mathcal{N}_w$ jako uniwersum podprzestrzeni topologicznej. Stąd $\bigcap \mathcal{N}_w$ pełni w niej rolę zbioru wyróżnionego.

Zajmiemy się punktową równoważnością, korzystając z indukcji po złożoności formuły.

(1) $\to$:

($\Rightarrow$) Niech $w \Vdash \varphi \to \psi$. Chcemy pokazać, że istnieje pewien $\langle \bigcup \mathcal{N}_x, \mathcal{O}_x, \bigcap \mathcal{N}_x \rangle \in \mathfrak{W}$ taki że $w \in Int_x((-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi))$.

Możemy powiedzieć, że $w \in \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{x \in W; x \nVdash \varphi$ lub $x \Vdash \psi\}$. Z założenia indukcyjnego zbiór ten można zapisać jako $\{x \in W; x \notin V_t(\varphi)$ lub $x \in V_t(\psi)\} = -V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$. Przypomnijmy, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem $w \in \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq (-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)) \cap \bigcup \mathcal{N}_w$. Tak więc $\bigcap \mathcal{N}_w$ jest w-otwarty, a zatem zawarty w $Int_w(-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi))$. Możemy zatem traktować w jako nasz x.

($\Leftarrow$) Teraz załóżmy, że $w \in V_t(\varphi \to \psi)$. Mamy więc pewną $\mathcal{U}_x$ taką, że $w \in Int_x((-V_t(\varphi) \cap V_t(\psi))$. Z indukcji, $w \in Int_x(\{z \in W; z \nVdash \varphi$ lub $z \Vdash \psi\})$. Zatem w należy do największego x-otwartego zbioru X takiego, że $X \subseteq \{z \in W; z \nVdash \varphi$ lub $z \Vdash \psi\}$. Ale jeśli X jest x-otwarty, to $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X$. Zatem $w \Vdash \varphi \to \psi$.

(2) $\Box$:

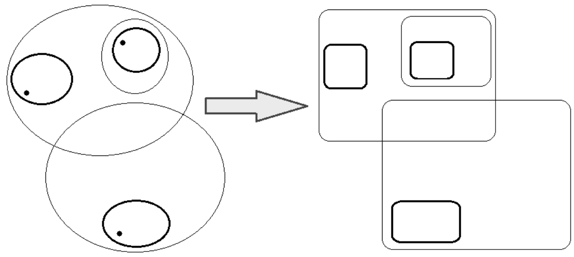
($\Rightarrow$) Załóżmy, że $w \Vdash \Box\varphi$. Chcemy pokazać, że $w \in V_t(\Box\varphi)$, tzn., że istnieje $X \subseteq W$ taki, że $w \in X$ i dla pewnego $\mathcal{U}_x$ mamy: $X = \bigcap \mathcal{N}_x$, $\bigcup \mathcal{N}_x \subseteq V_t(\varphi)$.

Możemy oczywiście wziąć $x = w$. Jeśli teraz $w \Vdash \Box\varphi$, to $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq V_{\mathcal{N}}(\varphi)$. Z indukcji, $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq V_t(\varphi)$.

($\Leftarrow$) Niech $w \in V_t(\Box\varphi)$. Zatem $w \in X \subseteq W$, przy czym dla pewnej $\mathcal{U}_x$ mamy $X = \bigcap \mathcal{N}_x$ oraz $\bigcup \mathcal{N}_x \subseteq V_t(\varphi)$.

Jeśli $\bigcup \mathcal{N}_s \subseteq V_t(\varphi)$, to (z założenia indukcyjnego) $\bigcup \mathcal{N}_x \subseteq V_{\mathcal{N}}(\varphi)$. Zatem $x \Vdash \Box\varphi$. Ale $w \in \bigcap \mathcal{N}_x$. Z monotoniczności wymuszania wnosimy, iż $w \Vdash \Box\varphi$.

$\Box$



Rysunek 11. Od otoczeń do przestrzeni multi-topologicznych z wyróżnionymi zbiorami

2.4. **Od struktur multi-topologicznych do otoczeniowych.** W poprzednim rozdziale używaliśmy przestrzeni z wyróżnionymi zbiorami D^{τ}. Te zbiory były odpowiednikami minimalnych w-otoczeń (gdy uniwersa podprzestrzeni pełniły rolę w-otoczeń maksymalnych). Skorzystaliśmy z takiego nietypowego podejścia, bo nasza topologia $\mathcal{U}_w$ "nie rozpoznaje" minimalnych otoczeń. Jeśli więc mamy $\bigcup \mathcal{N}_w$, to z otoczeniowego punktu widzenia $\bigcap \mathcal{N}_w$ jest szczególny - ale jako zbiór w-otwarty nie różni się niczym od innych zbiorów w-otwartych. Wszelako takie wyróżnienie jest potrzebne, by osiągnąć tożsamość $V_{\mathcal{N}}$ i V_t.

Teraz przenosimy się na drugą stronę: zaczynamy od struktur topologicznych, acz zdefiniowanych w nieco *inny* sposób. Nie mamy tu zbiorów wyróżnionych.

Definicja 2.8. Definiujemy **t2**-strukturę jako parę $\langle W, \mathfrak{W} \rangle$ gdzie:

(1) $W \neq \emptyset$.
(2) $\mathfrak{W} = \{\langle T, \tau\rangle : T \subseteq W,\ \tau$ jest topologią Aleksandrowa na $T\}$.
(3) $W = \bigcup \mathcal{T}$, gdzie $\mathcal{T} = \{T; \langle T, \tau\rangle \in \mathfrak{W}\}$.

Każda para $\langle T, \tau\rangle$ jest Aleksandrowa, zatem $w \in T$ ma swoje minimalne τ-otwarte otoczenie. Jeżeli rodzinę τ-otwartych w-otoczeń oznaczymy jako $\mathcal{O}^w_\tau$, to będziemy mogli wprowadzić następujący zapis: $\bigcap \mathcal{O}^w_\tau = \min \mathcal{O}^w_\tau$ [10].

Definicja struktury jest podobna do Def. 2.1, ale tym razem nie ma wyróżnionych zbiorów. W definicji modelu różnice będą większe. W istocie określimy wartościowanie i wymuszanie formuł *dopiero po* wprowadzeniu szczególnego typu otoczeń w naszym nowym środowisku.

Pomyślmy teraz o przekroju wszystkich τ-otwartych minimalnych w-otoczeń (tzn. kroimy po wszystkich topologiach). Oznaczymy go jako $\bigcap_{\langle T,\tau\rangle \in \mathcal{T}^w}\{\min \mathcal{O}^w_\tau\}$ lub krótko jako $\bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^w}\{\min \mathcal{O}^w_\tau\}$, gdzie $\mathcal{T}^w = \{\langle T, \tau\rangle \in \mathfrak{W} : w \in T\}$. Teraz zdefiniujemy otoczenia (w pewnym sensie):

Definicja 2.9. Załóżmy, że mamy **t2**-strukturę $\langle W, \mathfrak{W}\rangle$. Wtedy dla każdego $w \in W$ określamy:
(1) $\bigcap \mathcal{N}^t_w = \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^w}\{\min \mathcal{O}^w_\tau\}$.
(2) $\bigcup \mathcal{N}^t_w = \bigcap \mathcal{T}^w$.
(3) $X \in \mathcal{N}^t_w \subseteq P(P(W)) \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}^t_w \subseteq X \subseteq \bigcup \mathcal{N}^t_w$.

Trzeba oczywiście wykazać, że istotnie mamy tu do czynienia z takimi otoczeniami, jakie będą nam potrzebne.

Twierdzenie 2.10. *Załóżmy, że mamy* **t2** *-strukturę* $\langle W, \mathfrak{W}\rangle$*, w której* $\mathcal{N}^t_w$ *zdefiniowano tak jak w Def. 2.9. Twierdzimy, że dla każdego* $w \in U$*,* $\mathcal{N}^t_w$ *ma wszystkie własności rodziny otoczeń w* **in2** *-strukturze.*

Dowód. Musimy sprawdzić pięć warunków:
(1) $w \in \bigcap \mathcal{N}^t_w$. To proste, bo $\bigcap \mathcal{N}^t_w$ zdefiniowaliśmy jako przekrój wszystkich τ-otwartych w-otoczeń (dla każdej τ in $\mathcal{T}^w$), a z pewnością w lokuje się w każdym takim otoczeniu.
(2) $\bigcap \mathcal{N}^t_w \in \mathcal{N}^t_w$. To oczywiste z samej definicji $\mathcal{N}^t_w$.
(3) $v \in \bigcap \mathcal{N}^t_w \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}^t_v \subseteq \bigcap \mathcal{N}^t_w$.
Odnotujmy dwa fakty. Po pierwsze, v jest przynajmniej w tych wszystkich przestrzeniach (uniwersach), w których jest w (bo jest w przekroju wszystkich minimalnych w-otoczeń). Możemy więc rzec, iż
$\bigcap \mathcal{N}^t_v = \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^v}\{\min \mathcal{O}^v_\tau\} \subseteq \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^w}\{\min \mathcal{O}^v_\tau\}$.
Mówiąc obrazowo i nieco kolokwialnie, wynika to z tego, że $\mathcal{T}^w \subseteq \mathcal{T}^v$, tzn. szukając $\bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^v}\{\min \mathcal{O}^v_\tau\}$ najpierw i tak kroimy po wszystkich topologiach z $\mathcal{T}^w$, a potem być może jeszcze po innych, specyficznych dla samego v.
Po drugie, przypuśćmy na chwilę, że pracujemy z jedną konkretną przestrzenią Aleksandrowa ρ. Załóżmy, że v należy do minimalnego ρ-otwartego otoczenia w. Rzecz jasna v też swoje własne minimalne ρ-otwarte otoczenie. Przypuśćmy jednak, że $\min \mathcal{O}^v_\rho \nsubseteq \min \mathcal{O}^w_\rho$. Teraz - z faktu, że skończone przekroje zbiorów otwartych w tej samej topologii są otwarte - wnosimy, że $\min \mathcal{O}^v_\rho \cap \min \mathcal{O}^w_\rho$ jest ρ-otwarty. Ale oczywiście przekrój ten zawiera się w $\min \mathcal{O}^w_\rho$. Co więcej, przynajmniej v należy do tego przekroju, zatem to on jest jego faktycznym minimalnym ρ-otwartym otoczeniem. Mamy zatem sprzeczność z przypuszczeniem, że minimalne ρ-otwarte v-otoczenie *nie* jest zawarte w $\min \mathcal{O}^w_\rho$.

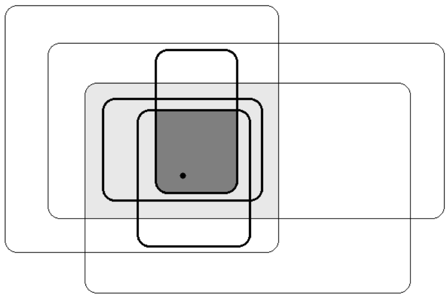
[10] Robimy to po to, by później uniknąć podwójnego stosowania symbolu $\bigcap$.

Wróćmy do głównej części dowodu. Fakt opisany przed chwilą pozwala nam twierdzić, że $\bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^w}\{\min \mathcal{O}^v_\tau\} \subseteq \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}^w}\{\min \mathcal{O}^w_\tau\} = \bigcap \mathcal{N}^t_w$.

(4) $v \in \bigcap \mathcal{N}^t_w \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}^t_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}^t_w$. Jak wcześniej, powiemy, że v lokuje się co najmniej w każdej takiej przestrzeni, która należy do $\mathcal{T}^w$. Zatem $\bigcup \mathcal{N}^t_v = \bigcap \mathcal{T}^v = \bigcap \{\langle T, \tau\rangle \in \mathfrak{W} : v \in T\} \subseteq \bigcap \{\langle T, \tau\rangle \in \mathfrak{W} : w \in T\} = \bigcup \mathcal{N}^t_w$.

(5) $v \in \bigcup \mathcal{N}^t_w \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}^t_v \subseteq \bigcup \mathcal{N}^t_w$. Niech $v \in \bigcup \mathcal{N}^t_w$ zdefiniowanego tak jak w 2.9. Zatem $v \in \bigcap \mathcal{T}^w$, co w szczególności oznacza, że v jest we wszystkich tych uniwersach, w których jest w. Jest więc jasne, że $\bigcap \mathcal{N}^t_v$ - zdefiniowany, jak pamiętamy, jako przekrój wszystkich τ-otwartych, minimalnych v-otoczeń - musi być zawarty przynajmniej w każdym elemencie $\mathcal{T}^w$, tj. w $\bigcup \mathcal{N}^t_w$.

$\square$



Rysunek 12. Określenie maksymalnych i minimalnych otoczeń w **t2**-strukturach.

Przetworzyliśmy naszą wyjściową strukturę multi-topologiczną w **in2**-otoczeniową. Zauważmy, że jest możliwe, iż dla pewnej (a nawet każdej) τ zbiór $\bigcap \mathcal{N}^t_w$ *nie będzie* τ-otwarty. Nie oczekujemy tego. To po prostu przekrój wszystkich minimalnych w-otoczeń.

Teraz wprowadzimy wartościowanie i zbudujemy model.

Definicja 2.11. Załóżmy, że mamy **t2**-strukturę $\langle W, \mathfrak{W}\rangle$. Przypuśćmy, że dla każdego $w \in W$ zdefiniowaliśmy $\mathcal{N}^t_w$ jak w Def. 2.9. Wartościowanie V_t określamy jako funkcję z PV w $P(W)$ taką, że: jeśli $w \in V_t(q)$, to $\bigcap \mathcal{N}^t_w \subseteq V_t(q)$. Całą trójkę $\langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$ nazywamy **t2**-modelem.

Definicja 2.12. W każdym **t2**-modelu $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$ i dla każdej φ, wartościowanie formuł zdefiniowane jest następująco:

(1) $V_t(\varphi \wedge \psi) = V_t(\varphi) \cap V_t(\psi)$
(2) $V_t(\varphi \vee \psi) = V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$
(3) $V_t(\varphi \to \psi) = \bigcup_{x \in \mathscr{I}}\{\bigcap \mathcal{N}^t_x\}$, gdzie $\mathscr{I} = \{x \in W : \bigcap \mathcal{N}^t_x \subseteq -V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)\}$
(4) $V_t(\Box\varphi) = \bigcup_{x \in \mathscr{M}}\{\bigcap \mathcal{N}^t_x\}$, gdzie $\mathscr{M} = \{x \in W : \bigcup \mathcal{N}^t_x \subseteq V_t(\varphi)\}$

Powiemy, że formuła φ jest prawdziwa, jeżeli w każdym **t2**-modelu $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$ mamy $V_t(\varphi) = W$.

Kluczowe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.13. *Dla każdego* **t2**-*modelu* $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$ *istnieje* **in2**-*model* $M_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}, V_{\mathcal{N}}\rangle$*, który jest punktowo równoważny z* M_t*, tj.* $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow w \in V_t(\varphi)$.

Dowód. Weźmy M_t i wprowadźmy $\mathcal{N}^t_w$ dla każdego $w \in W$ tak jak w Def. 2.9. Określamy $V_{\mathcal{N}} : PV \to P(W)$ w następujący sposób: $V_{\mathcal{N}} = V_t$. Teraz struktura $M_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N}^t, V_{\mathcal{N}}\rangle$ jest modelem otoczeniowym. Już pokazaliśmy, że jest **in2**-strukturą. Wiemy też, że V_t jest monotoniczna. Sprawdźmy punktową równoważność.

(1) $\to$:

($\Rightarrow$) Niech $w \Vdash \varphi \to \psi$. Zatem $\bigcap \mathcal{N}_w^t \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi \text{ lub } v \Vdash \psi\} = -V_{\mathcal{N}}(\varphi) \cup V_{\mathcal{N}}(\psi)$. Z indukcji możemy ten zbiór zapisać jako $-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$. Tak więc w należy do $\mathscr{I}$ określonego jak w Def. 2.9. Oczywiście $w \in \bigcap \mathcal{N}_w^t$. Zatem $w \in V_t(\varphi \to \psi)$.

($\Leftarrow$) Niech $w \in V_t(\varphi \to \psi)$. To znaczy, że istnieje przynajmniej jeden taki $x \in \mathscr{I}$, że $w \in \bigcap \mathcal{N}_x^t$. Ale jeśli $\bigcap \mathcal{N}_x^t \subseteq -V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$, to możemy powiedzieć, iż $\bigcap \mathcal{N}_x^t \subseteq -V_{\mathcal{N}}(\varphi) \cup V_{\mathcal{N}}(\psi)$ (z indukcji). Zatem $x \Vdash \varphi \to \psi$. To samo rzec można o w (bo $w \in \bigcap \mathcal{N}_x^t$).

(2) $\Box$:

($\Rightarrow$) Niech $w \Vdash \Box\varphi$. Zatem $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq V_{\mathcal{N}}(\varphi) = V_t(\varphi)$ (z indukcji). Widzimy, że $w \in \mathscr{M}$. Oczywiście $w \in \bigcap \mathcal{N}_w^t$. Zatem $w \in V_t(\Box\varphi)$.

($\Leftarrow$) Niech $w \in V_t(\Box\varphi)$. Zatem istnieje przynajmniej jeden taki $x \in \mathscr{M}$, że $w \in \bigcap \mathcal{N}_x^t$. Ale jeśli $\bigcup \mathcal{N}_x^t \subseteq V_t(\varphi)$, to z indukcji $\bigcup \mathcal{N}_x^t \subseteq V_{\mathcal{N}}(\varphi)$. To znaczy, że $x \Vdash \Box\varphi$. Z monotoniczności wymuszania w $\bigcap \mathcal{N}_x^t$ możemy powiedzieć, iż $w \Vdash \Box\varphi$.

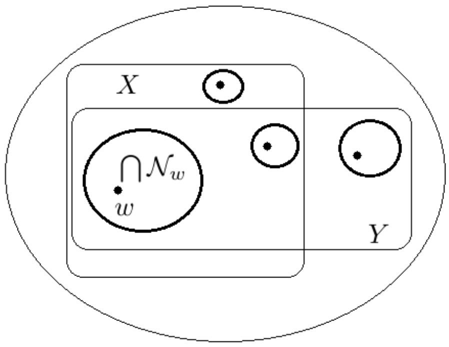
$\Box$

2.5. **Od otoczeń do topologii raz jeszcze.** Wróćmy do **in2**-struktur. Zdefiniujemy topologię nieco inaczej niż w Def. 2.4. Zakładamy teraz, że $\bigcap \mathcal{N}_w$ zawsze zawiera się w każdym w-otwartym zbiorze (niepustym).

Definicja 2.14. Załóżmy, że mamy **in2**-strukturę $M_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N} \rangle$. Powiemy, że $X \subseteq W$ jest $w_{\min}$-otwarty w **in2**-strukturze, jeżeli $X = \emptyset$ lub $X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$, $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X$ i dla każdego $v \in X$ mamy $\bigcap \mathcal{N}_v \subseteq X$. Przyjmujemy zapis $\mathcal{Q}_w = \{X \subseteq W : X$ są $w_{\min}$-otwarte $\}$ i nazywamy ten zbiór $w_{\min}$-topologią.

Prawdziwy jest poniższy lemat:

Lemat 2.15. *Załóżmy, że mamy* **in2** *-strukturę $F_{\mathcal{N}} = \langle W, \mathcal{N} \rangle$. Wtedy $\langle \bigcup \mathcal{N}_w, \mathcal{Q}_w \rangle$ jest przestrzenią topologiczną (dla każdego $w \in W$).*



RYSUNEK 13. Topologia $\mathcal{Q}_w$. X, Y są $w_{\min}$-otwarte.

Wprowadźmy teraz nowy rodzaj modeli multi-topologicznych. W istocie oparte będą one na **t2**-strukturach, ale z inaczej zdefiniowanym wartościowaniem. Przypomnijmy, że $\mathcal{O}_\tau^w$ oznacza rodzinę wszystkich τ-otwartych w-otoczeń (w sensie topologicznym) oraz $\min \mathcal{O}_\tau^w$ jest przekrojem takiej rodziny, tj. otoczeniem minimalnym w świetle danej topologii τ.

Definicja 2.16. Definiujemy **t3**-model jako trójkę $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V \rangle$, gdzie $\langle W, \mathfrak{W} \rangle$ to **t2**-struktura, zaś V_t to funkcja z PV w $P(W)$ taka, że: $V_t(q) = \bigcup \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} \subseteq \{X \subseteq W;$ istnieją $\langle T, \tau \rangle \in \mathfrak{W}$ oraz $w \in T$ takie, że $X = \min \mathcal{O}_\tau^w\}$.

Definicja 2.17. W każdym **t3**-modelu $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$, wartościowanie formuł złożonych definiujemy tak:

(1) $V_t(\varphi \wedge \psi) = V_t(\varphi) \cap V_t(\psi)$.
(2) $V_t(\varphi \vee \psi) = V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$.
(3) $V_t(\varphi \to \psi) = \bigcup \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq W;\ X \subseteq -V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$ oraz istnieją $\langle T, \tau\rangle \in \mathfrak{W}, x \in T$ dla których $X = \min \mathcal{O}_\tau^x\}$.
(4) $V_t(\Box\varphi) = \bigcup \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq W;$ że istnieją $\langle T, \tau\rangle \in \mathfrak{W}, x \in T$ dla których $X = \min \mathcal{O}_\tau^x$ oraz $T \subseteq V_t(\varphi)\}$.

Powiemy, że formuła φ jest prawdziwa, jeśli w każdym **t3**-modelu $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$ mamy $V_t(\varphi) = W$.

W pewnym sensie połączyliśmy nasze wcześniejsze definicje struktur i wartościowań. Korzystne jest to, że możemy pracować z minimalnymi zbiorami τ-otwartymi, tj. z $\min \mathcal{O}_\tau^w$.

Twierdzenie 2.18. *Dla każdego* **in2**-*modelu* $M_\mathcal{N} = \langle W, \mathcal{N}, V_\mathcal{N}\rangle$ *istnieje* **t3**-*model* $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$*, który jest punktowo równoważny z* $M_\mathcal{N}$*, i.e.* $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow w \in V_t(\varphi)$.

Dowód. Załóżmy, że mamy $M_\mathcal{N} = \langle W, \mathcal{N}, V_\mathcal{N}\rangle$. Rozważmy model $M_t = \langle W, \mathfrak{W}, V_t\rangle$, gdzie:

(1) $\mathfrak{W} = \{\langle \bigcup \mathcal{N}_w, \mathcal{Q}_w\rangle : w \in W\}$
(2) dla każdego $q \in PV$, $V_t(q) = V_\mathcal{N}(q)$

Łatwo pokazać, że $\langle W, \mathfrak{W}\rangle$ to **t2**-struktura. Dowiedźmy punktowej równoważności.

(1) $\to$:
(⇒) Niech $w \Vdash \varphi \to \psi$. Zatem $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi\}$. Z założenia indukcyjnego ten ostatni zbiór jest tożsamy z $-V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$. Co więcej, $\bigcap \mathcal{N}_w$ jest przekrojem wszystkich zbiorów $w_{\min}$-otwartych (por. Def. 2.14), zaś $w \in \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem $w \in V_t(\varphi \to \psi)$.
(⇐) Niech $w \in V_t(\varphi \to \psi)$. Po pierwsze, istnieje $X \subseteq W$ dla którego $w \in X$ oraz $X \subseteq -V_t(\varphi) \cup V_t(\psi)$. Po drugie, istnieje $\langle \bigcup \mathcal{N}_x, \mathcal{Q}_x\rangle \in \mathfrak{W}$ taki, że X to minimalne $\mathcal{Q}_x$-otwarte x-otoczenie. W istocie znaczy to, że $X = \bigcap \mathcal{N}_x$. Zatem $\bigcap \mathcal{N}_x \subseteq -V_t(\varphi) \cup V_t(\psi) =$[zał. ind.]$-V_\mathcal{N}(\varphi) \cup V_\mathcal{N}(\psi) = \{z \in W; z \nVdash \varphi$ lub $z \Vdash \psi\}$. W szczególności więc, $x \Vdash \varphi \to \psi$, a poza tym $w \Vdash \varphi \to \psi$ (bo $w \in \bigcap \mathcal{N}_x$ i mamy monotoniczność wymuszania).

(2) $\Box$
(⇒) Niech $w \Vdash \Box\varphi$. Zatem $\bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi\}$. Z założenia indukcyjnego ten ostatni zbiór jest tożsamy z $V_t(\varphi)$. Warunki z Def. 2.17 są: nasz X to $\bigcap \mathcal{N}_w$, a naszą przestrzenią jest $\langle \bigcup \mathcal{N}_w, \mathcal{Q}_w\rangle$. Zatem $w \in V_t(\Box\varphi)$.
(⇐) Niech $w \in V_t(\Box\varphi)$. Zatem mamy $X \subseteq W$ dla którego $w \in X$ oraz istnieją $x \in W$, $\langle \bigcup \mathcal{N}_x, \mathcal{Q}_x\rangle \in \mathfrak{W}$ takie, że X to $\bigcap \mathcal{N}_x$ (tj. minimalne $\mathcal{Q}_x$-otwarte x-otoczenie) oraz $\bigcup \mathcal{N}_x \subseteq V_t(\varphi)$. Z indukcji $\bigcup \mathcal{N}_x \subseteq V_\mathcal{N}(\varphi)$. Zatem $x \Vdash \Box\varphi$. Z monotoniczności wymuszania $w \Vdash \varphi$.

□

2.6. **Uwagi końcowe.** Wskazane jest, by krótko podsumować wyniki tej części, ponieważ pod względem technicznym mogą się wydawać skomplikowane.

Po pierwsze, pojęcia *otoczenia* używaliśmy na trzy sposoby. Wpierw mówiliśmy o klasie modeli otoczeniowych (**in2**-struktur). Później odnosiliśmy się do otoczeń w standardowym sensie topologicznym. Wreszcie wykorzystaliśmy te topologiczne otoczenia, aby przy ich pomocy zdefiniować otoczenia w sensie **in2**-struktur i dokonać odpowiedniej transformacji.

Na początku wprowadziliśmy **mtD**-struktury (modele). Są to kolekcje przestrzeni topologicznych, a w praktyce - podprzestrzeni indukowanych przez jedną topologię. Te podprzestrzenie mogą się kroić i sumować. Założyliśmy, że każda taka przestrzeń $\langle T, \tau \rangle$ posiada pewien wyróżniony zbiór otwarty D^τ. Wtedy pokazaliśmy, że **in2**-struktury można traktować jako **mtD**-struktury. Główna idea to zauważenie analogii pomiędzy otoczeniami maksymalnymi a uniwersami poszczególnych podprzestrzeni; oraz pomiędzy otoczeniami minimalnymi a zbiorami wyróżnionymi. Aby tę analogię wykorzystać, wprowadzamy w **in2**-strukturach topologie $\mathcal{U}_w$ (dla kadego $w \in W$).

Później mówiliśmy o **t2**-strukturach (modelach). Są one podobne do modeli z klasy **mtD**- ale tym razem nie ma już zbiorów wyróżnionych, zaś każda topologia jest Aleksandrowa. Pokazaliśmy, jak można te modele przetłumaczyć na otoczeniowe. Powtórzmy w skrócie główne kroki tego rozumowania. Załóżmy, że W to uniwersum pewnego **t2**-modelu. Weźmy dowolny $w \in W$. Dla każdej topologii τ mamy minimalne τ-otwarte w-otoczenie (z uwagi na własność Aleksandrowa). Bierzemy przekrój wszystkich takich minimalnych otoczeń i traktujemy go jako $\bigcap \mathcal{N}_w$ (tzn. jako minimalne w-otoczenie w sensie **in2**-struktur). Potem bierzemy przekrój wszystkich podprzestrzeni topologicznych, do których należy w - i to jest nasze otoczenie maksymalne.

Na końcu wracamy do **in2**-struktur, ale wprowadzamy w nich inną topologię, mianowicie $\mathcal{Q}_w$. Można przetłumaczyć **in2**-modele z tą topologią na **t3**-modele - które są oparte na **t2**-strukturach, ale z inną niż uprzednio waluacją.

3. Intuicjonistyczne logiki nieznanych prawd i fałszywych wierzeń

Treść niniejszej części pracy oparta jest w znacznej mierze na artykule [141], a w mniejszym stopniu także na [146] i [147]. Artykuł [141] jest w obecnie w fazie poprawek, po których będzie ponownie zrecenzowany w Bulletin of the Section of Logic.[11]

3.1. **Logiki fałszywych wierzeń.**

3.1.1. *Zarys zagadnienia.* Logiki fałszywych wierzeń (*logics of false belief*) badane były m.in. przez Steinsvolda [130], Fana [42] czy Gilberta i Venturiego [48]. Autorzy ci badali owe systemy równolegle z tzw. logikami nieznanych prawd (*logics of unknown truths*) oraz standardowymi logikami modalnymi (słabymi). W ten sposób udało się wypracować pewne rezultaty dotyczące aksjomatyzacji, pełności czy siły wyrazu poszczególnych języków. Narzędziami semantycznymi były zarówno modele relacyjne, jak i otoczeniowe. Należy przy tym zaznaczyć, że dociekania te obejmowały jedynie systemy oparte o logikę klasyczną, tj. z prawem wyłączonego środka.

W ogólności logika fałszywych wierzeń opisuje sytuację następującą: formuła φ jest fałszywa, ale mimo tego się w nią wierzy (por. [48]), tzn. wierzymy w nią my czy też podmiot, który nas interesuje. W każdym razie wiara ta obowiązuje w danym świecie możliwym. Koncept ów wyraża już sama definicja wymuszania formuły poprzedzonej operatorem modalnym W. Mianowicie: jeżeli w jest światem, to $w \Vdash \mathsf{W}\varphi \Leftrightarrow w \nVdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Fakt, że φ jest *błędnie* uważana za prawdziwą, wyrażono w drugiej części definicji poprzez to, że $V(\varphi)$ jest jednym z naszych otoczeń.

Możliwe są też inne interpretacje. Na przykład taka: odrzucamy φ (w danym świecie), ale zarazem formuła ta jest nam narzucana bądź sugerowana przez swego rodzaju "radę nadzorczą" czy też doradczą. Innymi słowy, jesteśmy zachęcani do tego, by przyjąć φ, przynajmniej w aktualnym świecie, czego przejawem jest fakt, iż wśród naszych otoczeń jest m.in. kolekcja światów akceptujących φ. To z kolei można rozumieć tak: że każde otoczenie gromadzi światy (a zatem i sytuacje czy też okoliczności), które są podobne do naszego obecnego świata. To podobieństwo przemawia za tym, by przemyśleć nasze zdanie na temat φ.

Możemy również identyfikować możliwe światy z różnymi ludźmi, akceptującymi lub odrzucającymi rozmaite formuły. Wówczas w-otoczenia można postrzegać jako - mniej lub bardziej wiarygodne - zbiorowości doradców.

Załóżmy, że nasze światy zostają częściowo uporządkowane: i jeżeli $w \leqslant v$, to v przyjmuje co najmniej te wszystkie formuły, które zostały już zaakceptowane przez w. Tym samym światy położone niżej mają pewien wpływ na światy wyższe. Daje to nam poniekąd hierarchię wiarygodności i zakresu posiadanej informacji. Wszelako w ten sposób nasz model staje się intuicjonistyczny (w każdym razie, jeżeli we właściwy sposób zdefiniujemy wymuszanie implikacji). Mamy monotoniczność wymuszania. Takie właśnie podejście będziemy tu badać. Przedstawimy kilka wariantów intuicjonistycznej logiki fałszywych wierzeń; przedyskutujemy ograniczenia jakie można lub trzeba nałożyć na nasze struktury otoczeniowo-relacyjne, by osiągnąć zarówno monotoniczność, jak i pełność. Zaprezentujemy również pewne subtelne różnice pomiędzy *frameworkiem* klasycznym a intuicjonistycznym, które uwidocznią się w kontekście modeli kanonicznych (minimalnych, maksymalnych i pośrednich).

W drugim rozdziale tej części rozprawy zajmiemy się zagadnieniem pokrewnym, choć nieco innym. Tym razem będzie nas interesować niemal najsłabsza intuicjonistyczna logika modalna; niemal, bo mówimy o systemie **E** poszerzonym o aksjomat

[11] Stan na dzień 18 lutego 2021. Poprawki nie dotyczą kwestii zasadniczych, a jedynie pewnych niuansów i rozłożenia materiału.

T. Przedstawimy cztery sposoby interpretacji modalności w terminach potwierdzenia lub odrzucenia (przy pomocy otoczeń, ponownie pełniących rolę "rady nadzorczej") formuły zaakceptowanej przez podmiot w danym świecie. Jedna z tych interpretacji (czy też: jedna z tych modalności) prowadzi do wspomnianej wcześniej logiki nieznanych prawd. Temat ten traktujemy jako otwarty: ograniczymy się jedynie do przedstawienia podstawowych pomysłów, ale i trudności. Otwartym zagadnieniem jest również sensowne (czyli np. otwierające drogę do pełności semantycznej) połączenie czterech operatorów, o których mowa, w jednym systemie.

3.1.2. *Podstawowe pojęcia.* Nasze logiki w dalszym ciągu będą miały charakter zdaniowy, zatem będą pozbawione kwantyfikatorów. Alfabet systemu $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$ zawiera jeden operator modalny W, pozostałe spójniki to $\wedge$, $\vee$ i $\to$, a także $\neg$, przy czym ten ostatni nadal można traktować jako zbudowany w oparciu o $\to$ i stałą $\bot$. Niezmienione - w stosunku do np. części pierwszej i drugiej - pozostają zasady budowania formuł; podobnie rzecz się ma z konsekwencją syntaktyczną.

Nasza bazowa struktura to częściowo uporządkowana struktura otoczeniowa (*preordered neighborhood frame*), $\mathbf{pn}$-struktura, określona tak:

Definicja 3.1. $\mathbf{pn}$-struktura to trójka $F = \langle W, \mathcal{N}, \leqslant \rangle$, gdzie $\leqslant$ to częściowy porządek na W, zaś $\mathcal{N}$ to funkcja z W w $P(P(W))$.

Oczywiście ta definicja jest bardzo ogólna i nie gwarantuje żadnego związku pomiędzy $\leqslant$ i $\mathcal{N}$. Z tego powodu wprowadzamy pewną podklasę $\mathbf{pn}$-struktur:

Definicja 3.2.
$\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-struktura to $\mathbf{pn}$-struktura spełniająca następujący warunek:

(1) $$[w \leqslant v, X \in \mathcal{N}_w, v \notin X] \Rightarrow X \in \mathcal{N}_v.$$

Mając już odpowiednie struktury, możemy wprowadzić pojęcie modelu. Znów zaczynamy od bardzo ogólnego wzorca:

Definicja 3.3. $\mathbf{pn}$-model to czwórka $M = \langle W, \mathcal{N}, \leqslant, V \rangle$, gdzie $\langle W, \mathcal{N}, \leqslant \rangle$ to $\mathbf{pn}$-struktura, zaś V to funkcja z PV w $P(W)$ taka, że: jeśli $w \in V(q)$ oraz $w \leqslant v$, to $v \in V(q)$.

Definicja 3.4. W każdym $\mathbf{pn}$-modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, \leqslant, V \rangle$, wymuszanie formuł w świecie $w \in W$ jest zdefiniowane indukcyjnie:

(1) $w \nVdash \bot$.
(2) $w \Vdash q \Leftrightarrow w \in V(q)$ dla każdego $q \in PV$.
(3) $w \Vdash \varphi \wedge \psi$ (resp. $\varphi \vee \psi$) $\Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz (resp. lub) $w \Vdash \psi$.
(4) $w \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi$ dla każdego $v \in W$ takiego, że $w \leqslant v$.

Nie czynimy różnicy pomiędzy pierwotnym wartościowaniem i jego wersją rozszerzoną, zatem będziemy używać tylko jednego symbolu, mianowicie V. Z tego powodu $V(\varphi)$ nadal będzie, jak w poprzednich częściach pracy, skrótem dla $\{z \in W; z \Vdash \varphi\}$.

Uwaga 3.5. Definicja powyższa pozwala nam oczywiście powiedzieć, że $w \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ dla każdego $v \geqslant w$ mamy $v \nVdash \varphi$.

Znów wyjściowe pojęcie zawężamy do bardziej dla nas użytecznego:

Definicja 3.6. $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model to $\mathbf{pn}$-model z wartościowaniem i wymuszaniem formuł nie-modalnych określonym tak jak w Def. 3.4, ale z dodatkowym zastrzeżeniem:
$w \Vdash \mathsf{W}\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \neg\varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$.

3.1.3. *Monotoniczność wymuszania.* Dowodzimy następującego faktu:

Twierdzenie 3.7. *W każdym* $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-modelu* $M = \langle W, \mathcal{N}, \leqslant, V\rangle$ *zachodzi następująca prawidłowość: jeżeli* $w \Vdash \gamma$ *oraz* $w \leqslant v$*, to* $v \Vdash \gamma$*.*

Dowód. Rozważymy tylko przypadek modalny. Niech $\gamma = \mathsf{W}\varphi$, $w, v \in W$, $w \leqslant v$ oraz $w \Vdash \gamma$. Zatem, $w \Vdash \neg\varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Rzecz jasna $v \Vdash \neg\varphi$. W szczególności znaczy to, że $v \notin V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Teraz Warunek 1 pozwala nam powiedzieć, że $V(\varphi) \in \mathcal{N}_v$. A zatem $w \Vdash \mathsf{W}\varphi$. □

Istnieje pewna różnica pomiędzy naszą definicją operatora W, a tą, z której korzystali wspomniani wcześniej autorzy (np. w [42] czy [48]). Ich operator zdefiniowany był następująco: $w \Vdash \mathsf{W}\varphi \Leftrightarrow w \nVdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Wszelako był on osadzony we *frameworku* klasycznym, a więc nie było tam różnicy pomiędzy brakiem akceptacji formuły, a akceptacją jej negacji. W naszym ujęciu - intuicjonistycznym - takie podejście byłoby problematyczne: jeżeli $w \nVdash \varphi$, to nie znaczy to, że φ zostaje odrzucona w każdym, czy choćby w którymkolwiek, świecie v położonym powyżej w. Nie ma zresztą powodu, by tak było: w istocie na tym przecież polega, przynajmniej z sematycznego punktu widzenia, różnica pomiędzy podejściem intuicjonistycznym a klasycznym. Musieliśmy zatem zmodyfikować interpretację W i wprost zadeklarować w nim negację.

3.1.4. *Aksjomatyzacja.* W tym podrozdziale przedstawimy pełną aksjomatyzację naszego podstawowego systemu.

Definicja 3.8. $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$ zdefiniowana jest jako najmniejszy zbiór formuł zawierający $\mathbf{IPC} \cup \{\mathtt{WE}\}$, domknięty na następujące reguły wnioskowania: $\{\mathtt{MP}, \mathtt{REW}\}$, gdzie:

(1) `WE` to schemat $\mathsf{W}\varphi \rightarrow \neg\varphi$.
(2) `REW` to reguła ekstensjonalności: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \mathsf{W}\varphi \leftrightarrow \mathsf{W}\psi$.

Zachodzi następujące twierdzenie (łatwe do udowodnienia poprzez sprawdzenie odpowiednich przypadków):

Twierdzenie 3.9. *System* $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$ *jest przystosowany do klasy wszystkich* $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-struktur.*

Dowiedziemy również pełności naszego systemu względem tejże klasy, a nawet klasy nieco węższej. Zakładamy, że czytelnik jest świadom, iż każda niesprzeczna $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$-teoria może zostać (na mocy lematu Lindenbauma i semantycznego twierdzenia o dedukcji) rozszerzona do *prime*-teorii. Przejdziemy zatem od razu do modelu kanonicznego. Będziemy używać skrótu $\widehat{\varphi} = \{z \in W; \varphi \in z\}$. Zbiór taki nazywamy *proof*-setem (dla formuły φ).

Znów zaczniemy od ogólnego wzorca, który będzie później wykorzystany kilka razy.

Definicja 3.10. $\mathbf{iL}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model to trójka $\langle W, \leqslant, \mathcal{N}, \leqslant, V\rangle$, gdzie $\mathbf{L}$ może być dowolną logiką wyrażoną w języku $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$, a poza tym:

(1) W to zbiór wszystkich *prime*-teorii logiki $\mathbf{L}$.
(2) Dla każdych $w, v \in W$ mamy $w \leqslant v \Leftrightarrow w \subseteq v$.
(3) $\mathcal{N}$ to funkcja z W w $P(P(W))$.
(4) $V : PV \rightarrow P(W)$ to funkcja zdefiniowana w następujący sposób: $w \in V(q) \Leftrightarrow q \in w$.

Teraz wykorzystamy nasz wzorzec po raz pierwszy:

Definicja 3.11. $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model to $\mathbf{iL}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model, w którym $\mathbf{L} = \mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$ oraz dla każdego $w \in W$ i dla każdej formuły φ mamy:
$\mathcal{N}_w = \{\widehat{\varphi}; \mathsf{W}\varphi \in w\}$.

Potrzebny jest nam oczywiście poniższy lemat:

Lemat 3.12. $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$ *-model to istotnie* $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$ *-model.*

Dowód. Należy wykazać, że spełniony jest warunek gwarantujący monotoniczność wymuszania. Niech $w \subseteq v$ oraz $v \notin X \in \mathcal{N}_w$. Zatem $X = \widehat{\varphi}$ dla pewnej φ takiej, że $\mathsf{W}\varphi \in w$. Wszelako w jest zawarty w v, zatem $\mathsf{W}\varphi \in v$. Stąd $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_v$. □

Uwaga 3.13. Zauważmy, że dotąd nie korzystaliśmy z faktu, że $v \notin X$. W rzeczywistości nie był on istotny. Tak naprawdę $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model spełnia silniejsze, ale i prostsze w zapisie założenie, mianowicie:

$$[w \leqslant v, X \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \in \mathcal{N}_v. \tag{2}$$

A zatem nasze twierdzenie o pełności będzie prawdziwe także dla węższej klasy struktur (modeli). Może nas jednak interesować nie tylko zawężanie tych klas, dla których zachodzi pełność, lecz również poszerzanie tych, które są wystarczające dla zagwarantowania monotoniczności wymuszania (rzecz jasna przy utrzymaniu pełności semantycznej).

Nasza funkcja otoczeniowa jest dobrze zdefiniowana. Po pierwsze, jeżeli założymy, że W to kolekcja wszystkich *prime*-teorii oraz $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$, to łatwo możemy dowieść, że $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ (nie angażując do tego żadnych narzędzi modalnych). Po drugie, załóżmy, że $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ oraz $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$. Jeżeli $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$, to $\mathsf{W}\varphi \in w$. Ale $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$ (jak już wiemy z pierwszej części naszych rozważań). Przy użyciu `REW` wnioskujemy, że $\mathsf{W}\varphi \leftrightarrow \mathsf{W}\psi \in \mathbf{iE}^{\mathsf{W}} \subseteq w$. Na mocy `MP`, $\mathsf{W}\psi \in w$.

W poniższym twierdzeniu dowodzimy oczekiwanej własności modelu kanonicznego:

Twierdzenie 3.14. *Niech* $M = \langle W, \leqslant, \mathcal{N}, V\rangle$ *będzie* $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$ *-modelem. Wtedy dla każdej* γ *i dla każdego* $w \in W$ *zachodzi następująca zależność:* $w \Vdash \gamma \Leftrightarrow \gamma \in w$.

Dowód. Przypadki boolowskie są proste (należy oczywiście pamiętać, że implikacja jest intuicjonistyczna). Jeżeli chodzi o przypadek modalny, załóżmy, że $\gamma = \mathsf{W}\varphi$.

($\Rightarrow$)

Niech $w \Vdash \gamma$. Zatem $w \Vdash \neg\varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Z założenia indukcyjnego $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$. Ale wtedy, z samej definicji otoczenia kanonicznego, $\mathsf{W}\varphi \in w$.

($\Leftarrow$)

Niech $\mathsf{W}\varphi \in w$. Na mocy `WE` i `MP` wnosimy, że $\neg\varphi \in w$. To przypadek boolowski: w standardowy sposób możemy pokazać [12], iż $w \Vdash \neg\varphi$. Z kolei z definicji otoczenia kanonicznego $\widehat{\varphi} \in W$, a to znaczy (korzystamy tu z założenia indukcyjnego), że $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Zbieramy te wnioski razem, by powiedzieć, że $w \Vdash \mathsf{W}\varphi$. □

Łatwo teraz sformułować twierdzenie o pełności.

Twierdzenie 3.15. $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$ *jest pełna względem klasy wszystkich* $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$ *-struktur; jak również względem tych, w których funkcja otoczeniowa spełnia Warunek 2.*

Dowód powyższego twierdzenia jest standardowy i oparty na założeniu, że w to teoria i $w \nVdash \varphi$. Całość zasadza się na pokazaniu, że istnieje taka *prime*-teoria v w modelu kanonicznym, że $w \subseteq v$ oraz $w \nVdash \varphi$.

Ktoś mógłby powiedzieć, że nasz system nie jest dobrą logiką fałszywych wierzeń, ponieważ w swoim aspekcie modalnym jest dużo słabszy niż niektóre systemy badane w [130], [48] czy [42]. To zagadnienie rozważymy w kolejnym podrozdziale.

---

[12] Na przykład wykorzystując fakt, że $\neg\varphi$ da się zapisać jako $\varphi \to \bot$.

3.1.5. *Silniejsze systemy fałszywych wierzeń.* Nietrudno do naszego podstawowego zestawu dodać jeden bardzo naturalny aksjomat, mianowicie `WC`: $(\mathsf{W}\varphi \wedge \mathsf{W}\psi) \to \mathsf{W}(\varphi \wedge \psi)$. Poniżej mamy konieczne definicje:

Definicja 3.16. $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}$ defniujemy jako $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}} \cup \{\mathtt{WC}\}$.

Definicja 3.17. $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model definiujemy jako $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model z jednym dodatkowym ograniczeniem (mianowicie *domknięciem na skończone przekroje*):

(3) $$[X, Y \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{N}_w.$$

Model kanoniczny dla $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}$ (tj. $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model) definiujemy tak samo jak $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model (ale oczywiście światami są teraz *prime*-teorie systemu $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}$). Trzeba zatem wykazać jedynie poniższy lemat:

Lemat 3.18. $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$*-model to istotnie* $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-model.*

Dowód. Dowód jest prosty. Załóżmy, że $X, Y \in \mathcal{N}_w$. Zatem $X = \widehat{\varphi}$ oraz $Y = \widehat{\psi}$ (dla pewnych φ i ψ takich, że $\mathsf{W}\varphi \in w$ oraz $\mathsf{W}\psi \in w$). Wtedy $X \cap Y = \widehat{\varphi} \cap \widehat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}$. Zarazem korzystamy z aksjomatu `WC`, aby powiedzieć, że $\mathsf{W}(\varphi \wedge \psi) \in w$. Zatem $X \cap Y \in \mathcal{N}_w$. □

Możemy teraz powiedzieć:

Twierdzenie 3.19. $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}$ *jest pełna względem klasy wszystkich* $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-struktur (i tych* $\mathbf{iEC}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-struktur, które spełniają Warunek 2).*

Rozważmy inny system: intuicjonistyczny wariant logiki $\mathbf{M}^{\mathsf{W}}$, badanej w [42].[13]

Definicja 3.20. $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}$ jest zdefiniowana jako $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}} \cup \{\mathtt{RMW}\}$, gdzie:

(1) `RMW` to reguła $\varphi \to \psi \vdash (\mathsf{W}\varphi \wedge \neg\psi) \to \mathsf{W}\psi$.

Wprowadzamy nową klasę modeli:

Definicja 3.21. $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model to $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model z jednym dodatkowym ograniczeniem (*suplementacją*):

(4) $$[X \in \mathcal{N}_w, X \subseteq Y] \Rightarrow Y \in \mathcal{N}_w.$$

Lemat 3.22. $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}$ *jest przystosowana do klasy wszystkich* $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-modeli.*

Dowód. Sprawdzimy to jedynie dla `RMW`. Niech $\varphi \to \psi$ będzie tautologią. Załóżmy, że istnieją $M = \langle W, \leqslant, \mathcal{N}, V\rangle$ oraz $w \in W$ takie, że $w \nVdash (\mathsf{W}\varphi \wedge \neg\psi) \to \mathsf{W}\psi)$. Istnieje zatem $v \geqslant w$ taki, że $v \Vdash (\mathsf{W}\varphi \wedge \neg\psi)$, ale $v \nVdash \mathsf{W}\psi$. To oznacza, że: **i)** $v \Vdash \neg\varphi$, $V(\varphi) \in \mathcal{N}_v$, $v \Vdash \neg\psi$; oraz **ii)** $v \nVdash \neg\psi$ lub $V(\psi) \notin \mathcal{N}_v$. Nie jest możliwe, że $v \nVdash \neg\psi$. Zarazem, jeżeli $\varphi \to \psi$ jest ogólnie prawdziwa, to $V(\varphi) \subseteq V(\psi)$. Własność suplementacji pozwala nam powiedzieć, że $V(\psi) \in \mathcal{N}_v$. To jest sprzeczność. □

Przejdźmy do modelu kanonicznego.

Definicja 3.23. $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model jest $\mathbf{iL}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model, w którym $\mathbf{L} = \mathbf{iM}^{\mathsf{W}}$ oraz dla każdej $w \in W$ i dla każdej formuły φ mamy:
$\mathcal{N}_w = \{X \subseteq W;\ \text{istnieje } Y \in n_w \text{ taki że } Y \subseteq X\}$, gdzie $n_w = \{\widehat{\varphi}; \mathsf{W}\varphi \in w\}$.

Musimy dowieść poniższego lematu:

Lemat 3.24. $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$*-model to istotnie* $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-model.*

[13] Mówiąc ściśle, Fan użył aksjomatu $\mathsf{W}(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\psi \to \mathsf{W}\psi$. Reguła `REW` może zostać wyprowadzona z tego aksjomatu oraz `WE`.

Dowód. Zajmijmy się warunkiem monotoniczności, mianowicie Warunkiem 1. Niech $w \subseteq v$, $v \notin X$ oraz $X \in \mathcal{N}_w$. Istnieje zatem $Y \in n_w$ taki że $Y \subseteq X$. Wiemy jednak, że n spełnia Warunek 2, silniejszy nawet niż Warunek 1. Zatem $Y \in n_v$ i dlatego $X \in \mathcal{N}_v$.

Jeżeli chodzi o suplementację, to wynika ona z samej definicji $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-modelu. Załóżmy, że $X \in \mathcal{N}_w$ oraz $X \subseteq Y$. Istnieje wtedy taki $S \in n_w$, że $S \subseteq X \subseteq Y$. □

Uwaga 3.25. Zauważmy, że w istocie otoczenia $\mathcal{N}_w$ w $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-modelu spełniają także Warunek 2. Podobnie jak w przypadku $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-modelu, nie korzystaliśmy z tego, że $v \notin X$.

Następne twierdzenie jest kluczowe dla pełności:

Twierdzenie 3.26. *Niech $M = \langle W, \leqslant, \mathcal{N}, V\rangle$ będzie $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-modelem. Wtedy dla każdej formuły γ i dla każdego świata $w \in W$ zachodzi: $w \Vdash \gamma \Leftrightarrow \gamma \in w$.*

Dowód. Rozważmy przypadek modalny. Niech $\gamma = \mathsf{W}\varphi$.

($\Rightarrow$)

Niech $w \Vdash \mathsf{W}\varphi$. Wtedy $w \Vdash \neg\varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Zatem $\neg\varphi \in w$ i zarazem $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$. Poza tym istnieje zbiór $\widehat{\psi} \in n_w$, że $\widehat{\psi} \subseteq \widehat{\varphi}$, a przy tym $\mathsf{W}\psi \in w$. Otóż $\vdash \psi \to \varphi$, tzn. formuła ta jest twierdzeniem. Zatem, (z uwagi na `RMW`) $\vdash (\mathsf{W}\psi \wedge \neg\varphi) \to \mathsf{W}\varphi$. Załóżmy teraz, że $\mathsf{W}\varphi \notin w$. Są dwie możliwe przyczyny. Pierwsza: $\mathsf{W}\psi \notin w$ (sprzeczność). Druga: $\neg\varphi \notin w$. Ale $\neg\varphi \in w$, jak już wiemy.

($\Leftarrow$)

Niech $\mathsf{W}\varphi \in w$. Zatem $\neg\varphi \in w$, a stąd $w \Vdash \neg\varphi$. Wtedy $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$. Z założenia indukcyjnego, $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. W takim razie $w \Vdash \mathsf{W}\varphi$. □

Twierdzenie 3.27. $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}$ *jest pełna względem klasy wszystkich* $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-modeli (oraz tych* $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-modeli, w których otoczenia spełniają Warunek 2).*

Zbierzmy razem te wyniki.

Definicja 3.28. $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}$ definiujemy jako $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}} \cup \{\mathtt{WC}\}$.

Definicja 3.29. $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model to $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$-model, w którym otoczenia spełniają dwa dodatkowe ograniczenia: o domknięciu na skończone przekroje oraz o suplementacji.

Definicja 3.30. $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model definiujemy tak jak $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-model (ale W składa się z *prime*-teorii systemu $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}$).

Twierdzenie 3.31. $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}$ *jest pełna względem klasy wszystkich* $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}\mathbf{pn}$*-modeli (i tych spośród nich, w których otoczenia spełniają Warunek 2).*

Dowód. Wystarczy sprawdzić domknięcie na przekroje w $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}\mathbf{can\text{-}pn}$-modelu. Niech $X, Y \in \mathcal{N}_w$. Zatem istnieją $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi} \in n_w$ takie, że $\widehat{\varphi} \subseteq X$ oraz $\widehat{\psi} \subseteq Y$. Oczywiście $\widehat{\varphi} \cap \widehat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi} \subseteq X \cap Y$. Z uwagi na aksjomat `WC`, $\mathsf{W}(\varphi \wedge \psi) \in w$ i dlatego $X \cap Y \in n_w$. Ostatecznie $X \cap Y \in \mathcal{N}_w$. □

Należy tu przedyskutować kilka subtelnych kwestii, czemu poświęcony będzie następny podrozdział.

3.1.6. *Modele kanoniczne i monotoniczność.* Nasze podstawowe koncepcje zapożyczyliśmy z [42] i [48]. Istnieją wszelako pewne różnice w zastosowaniu, wynikające ze specyfiki intuicjonizmu. Dla przykładu, prześledźmy tok rozumowania przedstawiony w [42] w odniesieniu do klasycznej wersji $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}$, tzn. do $\mathbf{M}^{\mathsf{W}}$.

i) Fan przyjął, że modelem kanonicznym dla $\mathbf{M}^{\mathsf{W}}$ jest dowolny model oparty na teoriach maksymalnych (z wartościowaniem zdefiniowanym w zwyczajowy sposób), w którym $\mathsf{W}\varphi \vee \varphi \in w \Leftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ [*]. W tym miejscu zdefiniujmy jeszcze jeden warunek, do którego później wrócimy, mianowicie: $W\varphi \in w \Leftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ [**].

W ten sposób Fan zdefiniował całą rodzinę takich modeli (od minimalnych do maksymalnych; te pierwsze zawierają tylko *proof*-sety, te drugie *proof*-sety oraz wszystkie zbiory, które *proof*-setami nie są).

My tymczasem zdefiniowaliśmy nasze otoczenia n_w (dla każdego $w \in W$) dokładnie tak, jak byłoby to w modelu minimalnym. Przyjęliśmy bowiem, że n_w zawiera dokładnie te $\widehat{\varphi}$, dla których $\mathsf{W}\varphi \in w$. Poza tym nasz sposób rozumowania był zbliżony bardziej do [**] niż do [*], acz w tym momencie nie to jest kluczowe.

ii) Później Fan wprowadził pojęcie suplementowanego modelu kanonicznego M^+ (innymi słowy, była to suplementacja modelu kanonicznego M). W takim obiekcie $\mathcal{N}_w^+ = \{X \subseteq W;$ istnieje $Y \in \mathcal{N}_w$ taki, że $Y \subseteq X\}$. Pokazał następnie, że taki M^+ istotnie jest modelem kanonicznym, tj. że spełnia warunek [*]. Z pewnych przyczyn byłoby dlań problematyczne pokazanie warunku [**]: wymagałoby to użycia typowej reguły monotoniczności, tj. $\varphi \to \psi \vdash \mathsf{W}\varphi \to \mathsf{W}\psi$, która wszelako nie jest prawdziwa.

Nasze podejście jest inne. Nie mówimy, że funkcja $\mathcal{N}$ w naszym $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can}$-$\mathbf{pn}$-modelu jest "kanoniczna" w takim samym sensie jak n. Nie miałoby to sensu, ponieważ definicja n_w nie zostawia miejsca na żadne warianty: jak powiedzieliśmy, są to dokładnie *proof*-sety (spełniające pewną własność). Można jednak zapytać, czy byłoby możliwe bezpośrednie powtórzenie rozumowania Fana? Załóżmy w takim razie, że n_w definiujemy przy pomocy klauzuli [**]. Może to być także [*], nie to jest tu kluczowe. Chodzi raczej o monotoniczność wymuszania. Otóż wydaje się, że zarówno [*], jak i [**] są zbyt ogólne, by ten warunek przeforsować (w odniesieniu do n tudzież w sensie Warunku 1 lub Warunku 2). Przyjmijmy teraz, że $w \subseteq v$ oraz $X \in n_w$. Możemy również założyć, że $v \notin X$. Jeśli $X = \widehat{\varphi}$ dla każdego φ, to nie bardzo widać szansę na stwierdzenie czegoś więcej. Oczywiście, gdyby nasz model był maksymalny, to X z samej definicji należałby do n_v. Jeżeli jednak mielibyśmy jakiś model pośredni, to wówczas pojawiłby się kłopot z dalszym wnioskowaniem.

Wydaje się, że podobne rozwiązanie podobnego dylematu zostało wypracowane w [33]. Autorzy ci przygotowali bi-otoczeniową[14] semantykę dla słabych intuicjonistycznych logik modalnych (omówimy ją w ostatnim rozdziale tej części pracy). W odniesieniu do najsłabszych systemów wykorzystali minimalne modele kanoniczne. W przypadku logik bogatszych, silniejszych, użyli modeli kanonicznych "wyposażonych" w suplementację (tak jak nasz $\mathbf{iM}^{\mathsf{W}}\mathbf{can}$-$\mathbf{pn}$-model), a nie suplementacji "wyjściowego modelu".

Gilbert i Venturi znaleźli inne rozwiązanie niż Fan. Założyli, że otoczenia w modelu kanonicznym (dla klasycznej wersji logiki $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}$) zdefiniowano przy pomocy warunku [**]. Później skorzystali z tzw. negatywnej suplementacji. To warunek, który opisać można następująco:

$Y \in \mathcal{N}_w, Y \subseteq X, w \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w$.

W negatywnej suplementacji modelu kanonicznego mamy (dla każdego $w \in W$ i dla każdej formuły φ):

$\mathcal{N}_w^+ = \{X \subseteq W;$ istnieje $Y \in \mathcal{N}_w$ taki, że $Y \subseteq X$ oraz $w \notin X\}$.

Ta "cecha negatywności" (tj. założenie, że $w \notin X$) pomaga udowodnić, że owa negatywna suplementacja jest istotnie kanoniczna. Z naszego punktu widzenia, interesująca jest jedna rzecz. Spróbujmy odtworzyć definicję $\mathbf{iK}^{\mathsf{W}}\mathbf{can}$-$\mathbf{pn}$-modelu, tyle że z następującą definicją otoczeń:

$\mathcal{N}_w = \{X \subseteq W;$ istnieje $Y \in n_w$ taki, że $Y \subseteq X$ oraz $w \notin X\}$, gdzie $n_w = \{\widehat{\varphi}; \mathsf{W}\varphi \in w\}$.

[14] To znaczy, że światom przypisywane są rodziny par otoczeń. Omówimy to w ostatnim podrozdziale.

Taka definicja zgadza się z naszymi pierwotnymi rozważaniami. Dowód pełności jest niemal identyczny. Tym niemniej warto zauważyć jedno przejście. Udowodnijmy mianowicie, że Warunek 1 jest spełniony. Niech $w \subseteq v$, $X \in \mathcal{N}_w$ oraz $v \notin X$. Istnieje $Y \in n_w$ taki, że $Y \subseteq X$. Jak wiemy, n spełnia Warunek 2 (por. Lem. 3.12 oraz Uw. 3.13), a zatem $Y \in n_v$. Zatem $X \in \mathcal{N}_v$. Zauważmy, że w tym przypadku dowodzimy tylko tego, że $\mathcal{N}$ spełnia Warunek 1, a niekoniecznie 2. Jawnie bowiem użyliśmy założenia, że $v \notin X$.

3.2. **Potwierdzanie, zachęcanie i odradzanie.**

3.2.1. *Język, struktury i modele.* W tym podrozdziale pracować będziemy z kilkoma językami (a także logikami i klasami struktur) równocześnie, tj. symultanicznie. Niektóre definicje i dowody zostaną przedstawione w formie skróconej, aby uniknąć powtarzania rzeczy oczywistych.

Definicja 3.32. Alfabet logiki $\Box$**Log** (odp. $\Diamond$**Log**, $\blacksquare$**Log**, $\bullet$**Log**) w swojej części nie-modalnej jest identyczny z alfabetem systemu $\mathbf{iE}^{\mathsf{W}}$. Zamiast W, jest on wyposażony w następujący operator modalny:

i) $\Box$ w przypadku $\Box$**Log**.
ii) $\Diamond$ w przypadku $\Diamond$**Log**.
iii) $\blacksquare$ w przypadku $\blacksquare$**Log**.
iv) $\bullet$ w przypadku $\bullet$**Log**.

Definicja 3.33. $\Box$**pn** (odp. $\Diamond$**pn**, $\blacksquare$**pn**, $\bullet$**pn**)-struktura to **pn**-struktura z następującymi dodatkowymi zastrzeżeniami:

(w przypadku $\Box$**pn**-struktur)

(5) $$[w \leqslant v, v \in X \subseteq W, X \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \in \mathcal{N}_v.$$

(w przypadku $\Diamond$**pn**-struktur)

(6) $$[w \leqslant v, v \in X \subseteq W, -X \notin \mathcal{N}_w] \Rightarrow -X \notin \mathcal{N}_v.$$

(w przypadku $\blacksquare$**pn**-struktur)

(7) $$[w \leqslant v, v \in X \subseteq W, -X \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow -X \in \mathcal{N}_v.$$

(w przypadku $\bullet$**pn**-struktur)

(8) $$[w \leqslant v, v \in X \subseteq W, X \notin \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \notin \mathcal{N}_v.$$

Definicja 3.34. $\Box$**pn** (odp. $\Diamond$**pn**, $\blacksquare$**pn**, $\bullet$**pn**)-model to **pn**-model, w którym wartościowanie i wymuszanie formuł nie-modalnych są określone tak jak w Def. 3.4, natomiast w odniesieniu do modalności zachodzi poniższy warunek:

i) $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$ (w $\Box$**pn**-modelu).
ii) $w \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz $-V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$ (w $\Diamond$**pn**-modelu).
iii) $w \Vdash \blacksquare\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz $-V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$ (w $\blacksquare$**pn**-modelu).
iv) $w \Vdash \bullet\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$ (w $\bullet$**pn**-modelu).

W tym miejscu możemy przedyskutować naszą interpretację tych operatorów.

i) Po pierwsze, mamy $\Box$. Tego znaku zazwyczaj używa się jako symbolu *konieczności*. Istotnie: nasza definicja bazuje na ogólnej idei modelowania konieczności w modelu otoczeniowym, tyle że koncept ten został zrealizowany we *frameworku* intuicjonistycznym. Założyliśmy jednak nie tylko to, że $V(\varphi)$ jest jednym z otoczeń świata w, ale i to, że w wymusza φ. Z tego powodu nasze rozumienie operatora $\Box$ może być wyrażone następująco: nasz agent (podmiot) akceptuje φ (w pewnych okolicznościach, tj. w świecie w), zaś jego decyzja jest dodatkowo wspierana czy też potwierdzana przez fakt, że $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. W nawiązaniu do uwag poczynionych we wstępie do tej części rozprawy, można powiedzieć tak: otoczenia grupują światy, a więc i okoliczności czy też sytuacje, w jakiś sposób podobne do naszych, zatem fakt, iż $V(\varphi)$ jest taką kolekcją, zwiększa wiarygodność tej formuły. Można też postrzegać sam świat w jako pewien podmiot, np. człowieka przyjmującego i weryfikującego informacje. Wówczas $V(\varphi)$ jest dodatkowo rekomendowana przez pewne wiarygodne grono doradcze.

Łatwo można pokazać, że tak określonej semantyki nie można zastąpić równoważną bi-relacyjną. Przykład poniższy (wzorowany na modelu z pracy Pacuit (por. [101]) jest co prawda klasyczny, ale działa poprawnie także we *frameworku* intuicjonistycznym (wystarczy np. założyć, co za chwilę zrobimy, że relacja $\leqslant$ jest pusta, tzn., że żadne światy nie są powiązane pre-porządkiem). Przyjmujemy przy tym, że przez model bi-relacyjny rozumiemy taki, w którym:

$w \Vdash_R \Box\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ i dla każdego $v \in W$ takiego, że wRv, zachodzi $v \Vdash \varphi$.

Jest to w zasadzie definicja z pierwszej części naszej pracy, acz dostosowana (co nie jest specjalnie istotne) do naszego obecnego postulatu, mianowicie tego, iż wymuszanie $\Box\varphi$ powinno w szczególności implikować wymuszanie φ. Wyobraźmy sobie teraz następujący $\Box$**pn**-model: $M = \{W, \mathcal{N}, \leqslant, V\}$, przy czym: $W = \{w, v\}, \mathcal{N}_w = \{\{w\}\}, \mathcal{N}_v = \{\{v\}\}, V(\varphi) = \{w, v\}, V(\psi) = \{w\}$ oraz pre-porządek $\leqslant$ jest pusty. Możemy powiedzieć, że $w \Vdash \Box(\varphi \wedge \psi)$ (albowiem $w \Vdash \varphi \wedge \psi$ oraz $\{z \in W; z \Vdash \varphi \wedge \psi\} = \{w\} \in \mathcal{N}_w$). Zarazem jednak $w \nVdash \Box\varphi$, ponieważ $\{z \in W; z \Vdash \varphi\} = \{w, v\} \notin \mathcal{N}_w$.

Rozważmy teraz to samo uniwersum i to samo wartościowanie, ale pomińmy otoczenia i przyjmijmy, że pracujemy z pewną relacją $R \subseteq W \times W$, która być może łączy niektóre punkty. Chcielibyśmy powiedzieć, że $w \nVdash_R \Box\varphi$ oraz $w \Vdash_R \Box(\varphi \wedge \psi)$. W odniesieniu do pierwszego członu tej meta-koniunkcji mamy dwie możliwości. Po pierwsze, może być tak, że $w \nVdash_R \varphi$. Wtedy $w \nVdash_R \varphi \wedge \psi$, a przez to $w \nVdash_R \Box(\varphi \wedge \psi)$. Sprzeczność. Po drugie, może istnieć taki $z \in W$, że wRz oraz $z \nVdash_R \varphi$. Niech z będzie tożsamy z w. Wtedy możemy powtórzyć wcześniejsze rozumowanie. W takim razie niech $z = v$. Jeżeli $v \nVdash_R \varphi$ oraz wRv, to nie możemy powiedzieć, iż koniunkcja $\varphi \wedge \psi$ zachodzi w każdym świecie R-widocznym z w. Zatem $w \nVdash_R \Box(\varphi \wedge \psi)$.

Można dodatkowo pokazać, że prawdziwy jest aksjomat D, rozumiany tu jako $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$. Załóżmy, że tak nie jest: istnieje zatem (w pewnym $\Box$**pn**-modelu M z uniwersum W) taki $w \in W$, że dla pewnego $v \in W, w \leqslant v$, zachodzi: $v \Vdash \Box\varphi$ oraz $v \nVdash \neg\Box\neg\varphi$. Zatem $v \Vdash \varphi$ oraz $\{z \in W; z \Vdash \varphi\} \in \mathcal{N}_v$, ale zarazem istnieje pewien $s \in W, v \leqslant s$, dla którego $s \Vdash \Box\neg\varphi$. Zatem w szczególności $s \Vdash \neg\varphi$, co już daje nam sprzeczność (ze względu na to, że $v \Vdash \varphi$, a mamy monotoniczność wymuszania).

To, że aksjomat *4* nie jest prawdziwy, nie jest szczególnie zaskakujące, warto jednak odnotować, że przestaje być aktualna jego typowa charakteryzacja, wyrażana następującym warunkiem (por. [59]):

$$X \in \mathcal{N}_w \Rightarrow \{v \in W; X \in \mathcal{N}_v\} \in \mathcal{N}_w. \tag{9}$$

Rozważmy następujący $\Box$**pn**-model: $M = \{W, \leqslant, \mathcal{N}, V\}$, w którym $W = \{v, z, u\}$, $\mathcal{N}_v = \{\{u, v\}, \{v, z\}\}$, $\mathcal{N}_z = \{\{u, v\}, \{v, z\}\}$, $\mathcal{N}_u = \{\{u\}\}$ oraz $V(\varphi) = \{u, v\}$ (pre-porządek jest pusty). Model ten dodatkowo spełnia (9). Otóż $v \Vdash \Box\varphi$, ale $v \nVdash \Box\Box\varphi$, bo $\{w \in W; w \Vdash \Box\varphi\} = \{v\} \notin \mathcal{N}_v$. Zauważmy jednak, że jest to w istocie model klasyczny: nasz wniosek nie jest oparty na intuicjonistycznym aspekcie modelu, ale na sposobie, w jaki rozumiemy wymuszanie konieczności (odnotujmy, że $z \nVdash \varphi$).

Nie posiadamy pełnej charakteryzacji modelowej aksjomatu *4* przy naszej definicji wymuszania konieczności, niemniej można przedstawić pewien cząstkowy rezultat: aksjomat *4* jest prawdziwy w dowolnym $\Box$**pn**-modelu, w którym zachodzi następująca zależność:

$$X \in \mathcal{N}_w \Rightarrow (Y \subseteq X \Rightarrow (Y \in \mathcal{N}_w)) \tag{10}$$

Istotnie: załóżmy bowiem, że model $M = \langle W, \leqslant, \mathcal{N}, V\rangle$ spełnia Warunek (10), $w \in W$ oraz $w \Vdash \Box\varphi$. Wtedy $w \Vdash \varphi$ oraz $X = \{v \in W; v \Vdash \varphi\} \in \mathcal{N}_w$. Ale $Y = \{v \in W; v \Vdash \Box\varphi\} \subseteq X$, a stąd $Y \in \mathcal{N}_w$. Zatem $w \Vdash \Box\Box\varphi$.

ii) Po drugie, mamy $\Diamond$. Tego symbolu używa się do wyrażania *możliwości*. My jednak zakładamy, że wymuszanie $\Diamond\varphi$ w szczególności implikuje wymuszanie φ, co trochę psuje tę tradycyjną intuicję. W świetle naszej interpretacji sprawy mają się tak: nasz agent akceptuje φ i *nie możemy* powiedzieć, że jest zniechęcany do tej decyzji, odciągany od niej: albowiem zbiór $-V(\varphi)$ nie znajduje się wśród naszych otoczeń.

Załóżmy na chwilę, że nasz język zawiera zarówno $\Box$, jak i $\Diamond$, a nasz model spełnia oba odpowiadające tym operatorom warunki monotoniczności. Jest to więc $\Box\Diamond$**pn**-model. Łatwo teraz możemy pokazać, że $\Box\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi$ to tautologia. Załóżmy mianowicie, że pewien świat w (w pewnym modelu) odrzuca tę formułę. Istnieje zatem $v \geqslant w$, że $v \Vdash \Box\varphi$ oraz $v \nVdash \neg\Diamond\neg\varphi$. Zatem, $v \Vdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_v$. Istnieje wszelako $s \geqslant v$ taki, że $s \Vdash \Diamond\neg\varphi$. W szczególności znaczy to, że $s \Vdash \neg\varphi$. Ale to jest niemożliwe, ponieważ $s \geqslant v$, a mamy monotoniczność wymuszania.[15]

Z drugiej strony, rozważmy $W = \{w, v\}$, gdzie $\mathcal{N}_w = \mathcal{N}_v = W$, $w \leqslant v$ oraz $V(\varphi) = \{v\}$. Ten model spełnia oba potrzebne warunki monotoniczności, tj. dla $\Box$ i $\Diamond$. Sprawdźmy to: **i)** jeżeli $x \leqslant y$ oraz $y \in X \in \mathcal{N}_x$, to $X = W$, zatem $X \in \mathcal{N}_y$; **ii)** jeżeli $x \leqslant y$, $y \in X$ oraz $-X \notin \mathcal{N}_x$, a więc $-X \notin \mathcal{N}_y$, albowiem jeżeli nie, to $-X = W$, czyli $X = \emptyset$ (sprzeczność, bo $x \in X$).

Teraz zauważmy, że $w \Vdash \neg\Diamond\neg\varphi$, albowiem dla każdego $x \geqslant w$ mamy $x \nVdash \neg\varphi$. Zarazem jednak $w \nVdash \Box\varphi$, gdyż $w \nVdash \varphi$. Zatem $\neg\Diamond\neg\varphi \to \Box\varphi$ nie jest tautologią w klasie $\Box\Diamond$**pn**-modeli.

Widać też, że $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ nie jest w tej klasie tautologią, nawet jeżeli implikacja ta jest bardzo naturalna. Stałaby się prawdziwa, gdybyśmy przyjęli, że $X \in \mathcal{N}_w \Rightarrow -X \notin \mathcal{N}_w$ (dla każdego $w \in W$).

iii) Trzeci operator to $\blacksquare$. Mówi on, że φ jest akceptowana przez agenta (w danym świecie), ale zarazem jest zniechęcany do tej formuły. Oto bowiem jednym z otoczeń jest $-V(\varphi)$.

iv) W czwartym przypadku mamy operator $\bullet$: tutaj φ nadal jest przez nas przyjmowana, zaś nasze "grono doradcze" co prawda nie odradza nam tej formuły, ale też jej nie zaleca. Istnieje także inna interpretacja $\bullet$: taka, która mówi, że φ jest prawdziwa, ale podmiot o tym nie wie (formuła jest nieznana). To prowadzi do tzw. *logiki nieznanych prawd*, którą zajmiemy się (acz tylko pobieżnie) pózniej.

* * *

Pytanie brzmi: czy da się uwzględnić wszystkie te cztery operatory w jednej logice zdaniowej opartej o intuicjonizm? Mamy oczywiście na myśli taki system, który byłby zaksjomatyzowany i zarazem wyznaczany przez pewną klasę struktur: relacyjno-otoczeniowych lub innych. Wydaje się zresztą, że system taki *de facto* dzieliłby się na dwie części: tę związaną z $\Box$ i $\Diamond$ (z aksjomatem $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$) - i tę wyznaczaną przez $\blacksquare$ i $\bullet$ (z aksjomatem $\blacksquare\varphi \to \bullet\varphi$). Z czysto filozoficznego punktu widzenia nie jest jasne, czy powinna istnieć jakaś silna łączność między tymi dwiema częściami.

[15] W istocie dowiedziemy tego w następnym podrozdziale. Czytelnika przepraszamy za zastosowanie tu niezbyt dobrej praktyki powoływania się na późniejsze twierdzenia.

W ogóle zresztą wydaje się, że zależności pomiędzy naszymi operatorami powinny być (a przynajmniej mogą być) raczej słabe. To dlatego, że powinniśmy naszej "radzie nadzorczej" pozwolić na pewnego rodzaju neutralność. Na przykład, jeżeli jesteśmy zniechęcani do φ (jak to ma miejsce w przypadku $\blacksquare\varphi$), to nie znaczy to, iż zachęca się nas do przyjęcia $\neg\varphi$. W szczególności taka zależność nie musi zachodzić w intuicjonizmie lub innych logikach z nieklasyczną negacją. Zarazem jeżeli *nie* jesteśmy zniechęcani do φ (czyli stosuje się do nas $\Diamond\varphi$), to wciąż nie oznacza to, że jesteśmy do tej formuły zachęcani (przy pomocy $\Box\varphi$). Z kolei jeżeli φ nie jest nam sugerowana (przypadek $\bullet\varphi$), to nie znaczy, że jest nam odradzana (jak to ma miejsce w przypadku $\blacksquare\varphi$).

Zauważmy, że możemy tu mówić o trzech różnych rzeczach: **i)** braku rekomendacji formuły; **ii)** zniechęcaniu do niej; **iii)** doradzaniu formuły przeciwnej, tj. $\neg\varphi$. Ten ostatni przypadek nie był wyżej analizowany. Wymagałby on nowego operatora, niech będzie to $\flat$, zdefiniowanego tak: $w \Vdash \flat\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ oraz $V(\neg\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Z intuicjonistycznego punktu widzenia to interesująca koncepcja: bo oczywiście $V(\neg\varphi)$ może być innym zbiorem aniżeli $-V(\varphi)$. Z drugiej strony, zawsze jest prawdą, że $V(\neg\varphi) \subseteq -V(\varphi)$. Jeżeli chodzi o warunek gwarantujący monotoniczność wymuszania i dopasowany do $\flat$, to może on wyglądać tak:

$[w \leqslant v,\ v \in X$ i istnieje $Y \in \mathcal{N}_w$ taki, że $Y \subseteq -X] \Rightarrow Y \in \mathcal{N}_v$.

Przypuśćmy teraz, że $w \in W$ oraz $w \Vdash \flat\varphi$. Wtedy $w \Vdash \varphi$ oraz $V(\neg\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Rzecz jasna $v \Vdash \varphi$ oraz $V(\neg\varphi) \subseteq -V(\varphi)$. Zatem $V(\neg\varphi) \in \mathcal{N}_v$. Zatem $v \Vdash \flat\varphi$.

Można oczywiście wyobrazić sobie trzy dodatkowe warianty $\flat$, analogiczne do operatorów $\Diamond$, $\blacksquare$ i $\bullet$. Nie będziemy tu rozwijać tego wątku.

3.2.2. *Monotoniczność i pełność.* Łatwo można dowieść poniższego faktu:

Twierdzenie 3.35. *W każdym* $\Box$**pn** *(odp.* $\Diamond$**pn**, $\blacksquare$**pn**, $\bullet$**pn** *)-modelu* $M = \langle W, \mathcal{N}, \leqslant, V\rangle$ *zachodzi następująca zależność: jeżeli* $w \Vdash \gamma$ *oraz* $w \leqslant v$, *to* $v \Vdash \gamma$.

Dowód. Rozważmy np. $\Diamond$**pn**-model. Niech $w \Vdash \Diamond\varphi$. Wtedy $w \Vdash \varphi$ (i przez to $v \Vdash \varphi$) oraz $-V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$. Ale w takim razie $-V(\varphi) \notin \mathcal{N}_v$, skoro $w \leqslant v$. Czyli $v \Vdash \Diamond\varphi$. $\Box$

Teraz przedstawimy adekwatną aksjomatyzację naszych systemów. W istocie można je postrzegać, z syntaktycznego punktu widzenia, jako jedną logikę: nieznacznie tylko silniejszą od najsłabszej intuicjonistycznej logiki z jedną modalnością. Różnica tkwi tylko w aksjomacie T. Można więc powiedzieć, że to, co faktycznie tu robimy, to prezentacja czterech różnych semantyk dla jednego systemu zdaniowego. Używamy jednak czterech symboli, choćby dlatego, że chcemy odróżnić od siebie cztery interpretacje, o których była mowa wcześniej. Usprawiedliwieniem jest także fakt, że pewnym dalekosiężnym celem, na tym etapie jednak niezrealizowanym, jest wykorzystanie wszystkich czterech modalności w jednym systemie.

Definicja 3.36. Logika $\Box$**Log** (odp. $\Diamond$**Log**, $\blacksquare$**Log**, $\bullet$**Log**) jest zdefiniowana jako najmniejszy zbiór formuł, zawierający **IPC** i domknięty na poniższe reguły: $\{T\,x, \mathtt{MP}, RE\,x\}$, gdzie:

(1) **IPC** to zbiór wszystkich tautologii intuicjonistycznych i ich podstawień modalnych.
(2) T_x to schemat $x\varphi \to \varphi$, gdzie:

i) $x = \Box$, w przypadku $\Box$**Log**.	**iii)** $x = \blacksquare$, w przypadku $\blacksquare$**Log**.
ii) $x = \Diamond$, w przypadku $\Diamond$**Log**.	**iv)** $x = \bullet$, w przypadku $\bullet$**Log**.

(3) `MP` to *modus ponens*.
(4) RE_x to *reguła ekstensjonalności*: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash x\varphi \leftrightarrow x\psi$, gdzie x zdefiniowany tak jak w przypadku T_x.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.37. *Logika* $\Box$**Log** *(odp.* $\Diamond$**Log** *,* $\blacksquare$**Log** *,* $\bullet$**Log** *) jest przystosowana do klasy wszystkich* $\Box$**pn** *(odp.* $\Diamond$**pn** *,* $\blacksquare$**pn** *,* $\bullet$**pn** *)-modeli.*

Co do modelu kanonicznego, to będzie on zdefiniowany symultanicznie dla wszystkich systemów.

Definicja 3.38. $\Box$**can-pn** (odp. $\Diamond$**can-pn** , $\blacksquare$**can-pn** , $\bullet$**can-pn**)-model to trójka $\langle W, \leqslant, \mathcal{N}, \leqslant, V\rangle$, gdzie:

(1) W to zbiór wszystkich *prime*-teorii $\Box$**Log** (odp. $\Diamond$**Log** , $\blacksquare$**Log** , $\bullet$**Log**).
(2) Dla każdego $w, v \in W$ powiemy, że $w \leqslant v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \subseteq v$.
(3) $\mathcal{N}$ to funkcja z W w $P(P(W))$ taka, że dla każdego $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
   i) $\mathcal{N}_w = \{\widehat{\varphi}; \Box\varphi \in w\}$ (w $\Box$**can-pn** -modelu).
   ii) $\mathcal{N}_w = \{X \subseteq W; X = W \setminus \widehat{\varphi}; \Diamond\varphi \notin w\}$ (w $\Diamond$**can-pn** -modelu).
   iii) $\mathcal{N}_w = \{X \subseteq W; X = W \setminus \widehat{\varphi}; \blacksquare\varphi \in w\}$ (w $\blacksquare$**can-pn** -modelu).
   iv) $\mathcal{N}_w = \{\widehat{\varphi}; \bullet\varphi \notin w\}$ (w $\bullet$**can-pn** -modelu).
(4) $V : PV \to P(W)$ to funkcja zdefiniowana następująco: $w \in V(q) \Leftrightarrow q \in w$.

Dla prostoty przyjmijmy następujące oznaczenia:
CAN $= \{\Box$**can-pn** , $\Diamond$**can-pn** , $\blacksquare$**can-pn** , $\bullet$**can-pn** $\}$,
LOG $= \{\Box$**Log** , $\Diamond$**Log** , $\blacksquare$**Log** , $\bullet$**Log** $\}$.
Musimy sprawdzić, czy nasze kanoniczne funkcje otoczeniowe są dobrze zdefiniowane.

Lemat 3.39. *Dla każdego* $M \in$ **CAN** *i dla każdej* prime-*teorii* w *opartej na odpowiedniej logice z* **LOG** *mamy następujący rezultat:*

- *W* $\Box$**can-pn** *-modelu: jeżeli* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ *oraz* $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$*, to* $\Box\psi \in w$.
- *W* $\Diamond$**can-pn** *-modelu: jeżeli* $W \setminus \widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ *oraz* $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$*, to* $\Diamond\psi \notin w$.
- *W* $\blacksquare$**can-pn** *-modelu: jeżeli* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ *oraz* $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$*, to* $\blacksquare\psi \notin w$.
- *W* $\bullet$**can-pn** *-model: jeżeli* $W \setminus \widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$ *oraz* $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$*, to* $\bullet\psi \notin w$.

Dowód. Nie będziemy rozpatrywać wszystkich przypadków (są do siebie podobne). Weźmy np. $\blacksquare$**can-pn** -model. Jeżeli $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$, to $\blacksquare\varphi \notin w$. Jak już wiemy, $\varphi \leftrightarrow \psi \in \blacksquare$**Log** . Zatem $\blacksquare\varphi \leftrightarrow \blacksquare\psi \in \blacksquare$**Log** $\subseteq w$. Załóżmy, że $\blacksquare\psi \in w$. Wtedy, z uwagi na `MP` i fakt, że $\blacksquare\psi \to \blacksquare\varphi$ to twierdzenie naszej logiki, otrzymujemy $\blacksquare\varphi \in w$. Sprzeczność. Zatem $\blacksquare\psi \notin w$. $\Box$

Następny lemat dotyczy monotoniczności.

Lemat 3.40. *Modele kanoniczne z* **CAN** *spełniają (odp.) warunki* **i**) - **iv**) *z Def. 3.33.*

Dowód. Znów przedstawimy tylko jeden przypadek. Niech M będzie $\bullet$**can-pn** -modelem. Załóżmy, że $w \subseteq v \in X$ oraz $X \notin \mathcal{N}_w$. Zatem dla każdej φ mamy: $X \neq \widehat{\varphi}$ lub $\bullet\varphi \in w$. W pierwszym przypadku sprawa jest jasna, zatem możemy skoncentrować się na drugim. Jak wiemy, $w \subseteq v$, zatem $\bullet\varphi \in v$. W takim razie X nie może należeć do $\mathcal{N}_v$, nawet jeżeli ma postać $\widehat{\varphi}$. $\Box$

Ostatecznie otrzymujemy kluczowy lemat:

Lemat 3.41. *W każdym modelu z* **CAN** *mamy (dla każdej* γ *i dla każdego* $w \in W$*):* $w \Vdash \gamma \Leftrightarrow \gamma \in w$.

Dowód. Pomyślmy o $\bullet$**can-pn** -modelu, na przykład. Załóżmy, że $\gamma = \bullet\varphi$ oraz $w \in W$. Niech $w \Vdash \gamma$, tj. $w \Vdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$. Z założenia indukcyjnego, $\varphi \in w$ oraz $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{N}_w$. Z samej definicji otoczeń w modelu kanonicznym, $\bullet\varphi \in w$.

Załóżmy teraz, że $\bullet\varphi \in w$. Wtedy $\varphi \in w$ (zatem, z założenia indukcyjnego, $w \Vdash \varphi$) oraz $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{N}_w$. Z indukcji, $V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$. $\Box$

Oto i nasz oczekiwany wniosek:

Twierdzenie 3.42. *Każdy system z* **LOG** *jest pełny względem odpowiadającej mu klasy modeli z* **CAN**.

Uwaga 3.43. Zauważmy, że w Lemacie 3.40 nie skorzystaliśmy z faktu, że $v \in X$. W istocie w każdym z czterech przypadków model kanoniczny spełnia silniejszy warunek monotoniczności. Na przykład w $\Box$**can-pn**-modelu będzie to klauzula znana już jako Warunek 2, tj. $[w \leqslant v, X \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \in \mathcal{N}_v$. Analogiczne warunki można łatwo wyprowadzić dla pozostałych modeli. Z tych powodów nasze systemy (które z syntaktycznego punktu widzenia są tą samą logiką) są pełne względem odpowiednich węższych klas.

Jak wspomnieliśmy, operator $\bullet$ jest związany z tzw. logikami nieznanych prawd, badanymi w [48] i [42]. W istocie to z nich zaczerpnęliśmy zarówno oznaczenie tej modalności, jak i jej definicję. Oczywiście te systemy w swej wyjściowej postaci były klasyczne. Można przy tym rozważać w nich drugi operator, mianowicie $\circ$, który definiuje się jako $\neg \bullet \varphi$. To znaczy, że $w \Vdash \circ\varphi \Leftrightarrow w \nVdash \varphi$ lub $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli zachowamy wspomnianą wyżej definicję $\circ$, to będziemy mieć problem z monotonicznością wymuszania w modelu intuicjonistycznym. Co więcej, o ile da się wówczas pokazać, że $w \Vdash \circ\varphi \Leftrightarrow w \Vdash \bullet\varphi$, o tyle nie pokażemy, że $w \Vdash \neg \bullet \varphi \Leftrightarrow w \Vdash \circ\varphi$ (zresztą powodem będzie właśnie ów kłopot z monotonicznością). Pozornym rozwiązaniem jest przyjęcie, że $w \Vdash \circ\varphi \Leftrightarrow$ dla każdego $v \geqslant w$ mam $v \nVdash \varphi$ lub $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. W tym wypadku pokażemy co prawda równoważność $\neg \bullet \varphi$ i $\circ\varphi$, ale za to zatracimy tożsamość $\neg \circ \varphi$ i $\bullet\varphi$. Swoją drogą, zasygnalizowane "problemy" niekoniecznie muszą być traktowane w ten sposób: skoro w intuicjonistycznej logice modalnej wręcz żąda się, by konieczność i możliwość *nie* były wzajemnie definiowalne, to niewykluczone, że podobne oczekiwanie można wyrazić i tutaj.

Fan zbadał pewne własności języków zawierających zarówno $\bullet$ i $\circ$, jak i W. Uważamy, że zagadnienia te warto zbadać także w kontekście intuicjonizmu. Nasze wstępne dociekania sugerują, że może to być interesujące. Dla przykładu, rozważmy system $\mathbf{B}_k$, badany w [48]. Zawiera aksjomaty $\circ\top$, $\bullet\varphi \rightarrow \varphi$ oraz $(\circ\varphi \wedge \circ\psi) \rightarrow \circ(\varphi \wedge \psi)$. Jest zamknięty na `MP` i regułę $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\circ\varphi \wedge \varphi) \rightarrow (\circ\psi \wedge \psi)$. Otóż wydaje się, że w dowodzie pełności tego systemu (względem klasy filtrów) Gilbert i Venturi wykorzystali fakt, że jeśli $\varphi \notin w$ (gdzie w to teoria maksymalna), to $\neg\varphi \in w$, a zatem $\circ\varphi \in w$ (albowiem z aksjomatu $\bullet\varphi \rightarrow \varphi$ wnosimy, że $\neg\varphi \rightarrow \neg \bullet \varphi \in w$, tj. $\neg\varphi \rightarrow \circ\varphi \in w$). Wszelako w odniesieniu do intuicjonistycznych *prime*-teorii nie możemy powiedzieć, że jeśli $\varphi \notin w$, to $\neg\varphi \in w$. Jeżeli problem ten (tj. problem pełności analogonu logiki $\mathbf{B}_k$ względem klasy modeli otoczeniowo-relacyjnych z otoczeniami będącymi filtrami) ma pozytywne rozwiązanie, to oczywiście wymaga ono zastosowania narzędzi intuicjonistycznych - albo np. zredefiniowania operatorów, jak to uczyniliśmy z W. Wówczas mielibyśmy np. taki wariant: $w \Vdash \circ\varphi \Leftrightarrow v \Vdash \neg\varphi$ lub $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$.

Ostatecznie uważamy też, że naturalnym rozwinięciem niniejszego rozdziału byłoby połączenie logik fałszywych wierzeń i nieznanych prawd z pewnymi narzędziami parakonsystentnymi. W istocie mamy tu na myśli operatory nieokreśloności (N) i niejednoznaczności (M), zaprezentowane przez Żabskiego w [152]. Zasadniczo Żabski przyjął, że wartościowanie V łączy każdą formułę φ z 0 lub 1[16]. Następnie:

[16]Oryginalne modele Żabskiego nie były oparte na światach możliwych (albo też, co na jedno wychodzi, oparte były na pojedynczym świecie).

$V(N\varphi) = 1 \Leftrightarrow V(\varphi) = 0$ oraz $V(\neg\varphi) = 0$;

$V(M\varphi) = 1 \Leftrightarrow V(\varphi) = 0$ oraz $V(\neg\varphi) = 0$.

Negacja nie jest tu oczywiście ani klasyczna, ani intuicjonistyczna - raczej parakonsystentna. Z filozoficznego punktu widzenia, ma pewien sens modelowanie następującej sytuacji: formuła φ jest "obiektywnie" nieokreślona lub niejednoznaczna (np. w danym świecie w, niemniej w nią wierzymy (albo też jest nam sugerowana przez doradców). Dotychczas podjęliśmy wstępne próby zdefiniowania odpowiednich systemów, będących intuicjonistycznymi odpowiednikami logik nihilistycznych Żabskiego, niemniej badania te na razie są na początkowym poziomie i nie byłoby celowe rozwijanie tego wątku w ramach doktoratu. Poprzestaniemy zatem na zasygnalizowaniu takiego kierunku.

Dygresja 3.44. W pracy [146] przedstawiliśmy wstępny zarys koncepcji połączenia semantyki otoczeniowej z modelami probabilistycznymi w sensie wyłożonym uprzednio przez grupę autorów serbskich (np. w książce [99]. Materiał ten prezentujemy w formie dygresji. W miejsce operatorów typowo modalnych mamy probabilistyczne.

Podstawowy model jest oparty na logice klasycznej. Ma on charakter piątki $\langle W, \mathcal{N}, \mathcal{H}, \mu, V\rangle$, gdzie $\mathcal{H}$ to algebra podzbiorów W, zaś μ to skończenie addytywna miara (zadana na $\mathcal{H}$) o wartościach w $[0, 1]$.

Można w tym modelu przyjąć różne warianty wymuszania formuł poprzedzonych operatorem probabilistycznym $P_{\geqslant s}$ (gdzie $s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$). W szczególności takie:

(1) $w \Vdash P_{\geqslant s}\varphi \Leftrightarrow \mu(V(\varphi)) \geqslant s$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$, $s \in S$.
(2) $w \Vdash P'_{\geqslant s}\varphi \Leftrightarrow$ istnieje mierzalny $X \in \mathcal{N}_w$ taki że $\mu(X) \geqslant s$ oraz dla każdego $z \in X$ mamy $z \Vdash \varphi$.
(3) $w \Vdash P''_{\geqslant s}\varphi \Leftrightarrow \mu(Y) \geqslant s$, przy czym: $Y = \bigcup \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{N}_w$; że dla każdego $z \in X$, $z \Vdash \varphi\}$ i żądamy, by $Y \in \mathcal{N}_w$.

Operatory te mają pewną interpretację poza-matematyczną. Pierwszy, tj. $P_{\geqslant s}$, wyraża następującą intuicję: aby prawdopodobieństwo formuły φ w świecie w było dostatecznie duże, to nie tylko miara zbioru wartości tej formuły powinna być odpowiednia, ale również ów zbiór winien być w gronie otoczeń, tzn. ma być "akceptowalny" (być może z zupełnie arbitralnych powodów). W przypadku $P'_{\geqslant s}$ żądamy otoczenia o dostatecznie dużej mierze i zarazem takiego, w którym każdy świat spełnia φ. Podobnie w przypadku $P''_{\geqslant s}$, acz tam gotowi jesteśmy uznać prawdopodobieństwo formuły, jeżeli suma miar otoczeń "jednomyślnie wspierających" φ będzie dostatecznie duża.

Można w każdym z tych przypadków żądać dodatkowo, by $w \Vdash \varphi$. Wtedy prawdopodobieństwo byłoby dodatkowym, choć niekoniecznie stuprocentowym (jeżeli pominąć zdarzenia pewne) potwierdzeniem naszej akceptacji formuły.

W podobny sposób można zdefiniować modele o charakterze intuicjonistycznym, wyposażone w częściowy porządek między światami.

Wydaje się, że tego typu koncepcja - otoczeń jako potwierdzenia dla prawdopodobieństw - jest obiecująca, aczkolwiek rodzi też pewne problemy. Na przykład w przypadku bazowego operatora $P_{\geqslant s}$ jasne jest, że formuła postaci $P_{\geqslant 0}\varphi$ (gdzie φ to dowolna formuła) nie będzie tautologią: wystarczy wszak, że $V(\varphi) \notin \mathcal{N}_w$ i nie pomoże wtedy dostatecznie duża miara zbioru $V(\varphi)$. Logik wyznaczanych przez wspomniane klasy modeli jak dotąd nie zaksjomatyzowaliśmy[17].

[17]Pragniemy jednak zaznaczyć, że zagadnienia te wyraźnie wykraczały poza nasz główny temat badań.

3.2.3. *Modele bi-otoczeniowe.* Ten krótki podrozdział ma charakter przeglądowy i porównawczy. Otóż w pracach [33], [34] i [35] autorzy zaprezentowali alternatywne (w stosunku np. do naszego, jeżeli mowa o operatorze $\Box$), a zarazem ciekawe i rozbudowane podejście do problemu słabych logik modalnych: zarówno tych z rdzeniem intuicjonistycznym, jak i klasycznych.

W odniesieniu do intuicjonizmu, autorzy rozważają m.in. minimalny system intuicjonistyczny wyposażony w dwie (niezależne od siebie) modalności $\Box$ i $\Diamond$. Są one powiązane tylko dwoma bardzo słabymi aksjomatami: $\Box\top \to \neg\Diamond\bot$ oraz $\Diamond\top \to \neg\Box\bot$. Do tego mamy tautologie intuicjonistyczne, *modus ponens* i dwie reguły ekstensjonalności modalnej (dwie, bo dla dwóch operatorów). To ujęcie hilbertowskie: równoważny jest mu pewien rachunek sekwentowy, również zdefiniowany przez autorów.

Z naszego punktu widzenia najbardziej interesująca jest semantyka (widoczne niżej definicje, z kosmetycznymi zmianami oznaczeń, reprodukujemy za [33]):

Definicja 3.45. *Intuicjonistycznym modelem bi-otoczeniowym* nazywamy czwórkę $\langle W, \leqslant, \mathcal{N}, V\rangle$, gdzie W to zbiór niepusty, $\leqslant$ to pre-porządek na W, zaś $\mathcal{N}$ to funkcja bi-otoczeniowa, tzn. dla wszystkich $w \in W$ jest $\mathcal{N}_w \subseteq \mathcal{P}(W) \times \mathcal{P}(W)$. Zakładamy, że : **i)** jeżeli $(X, Y) \in \mathcal{N}_w$, to $X \cap Y = \emptyset$, **ii)** jeżeli $w \leqslant v$, to $\mathcal{N}_v \subseteq \mathcal{N}_w$. Waluacja V przypisuje światom zbiory spełnionych w nich zmiennych zdaniowych, przy czym jeżeli $w \leqslant v$, to $V(w) \subseteq V(v)$.

Definicja 3.46. W intuicjonistycznym modelu bi-otoczeniowym wymuszanie definiujemy (w odniesieniu do operatorów $\Box$ i $\Diamond$) następująco:

$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow$ dla wszystkich $v \geqslant w$ istnieje $(X, Y) \in \mathcal{N}_v$ taki że dla wszystkich $u \in X$ mamy $u \Vdash \varphi$, zaś dla wszystkich $z \in Y$ mamy $z \nVdash \varphi$.

$w \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow$ dla wszystkich $(X, Y) \in \mathcal{N}_w$ istnieje $u \in X$ taki że $u \Vdash \varphi$ lub istnieje $v \in Y$ taki że $v \nVdash \varphi$.

Można to rozumieć tak: konieczność dla świata w jest potwierdzona, gdy w każdym świecie powyżej w znajdziemy takie bi-otoczenie, którego "lewa" strona "jednomyślnie" akceptuje formułę, a "prawa" ją jednomyślnie odrzuca. Z kolei możliwość w świecie w zachodzi, gdy w każdym bi-otoczeniu tego świata znajdzie się bądź to po "lewej" stronie przynajmniej jeden punkt potwierdzający formułę, bądź po prawej przynajmniej jeden, który ją odrzuca. Zauważmy, że wymuszanie możliwości nie jest, przynajmniej nie bezpośrednio, powiązane z pre-porządkiem.

Pełności dowodzi się przez modele kanoniczne, przy czym rodzinę otoczeń *prime*-teorii w takim modelu definiuje się tak:

$\mathcal{N}_w = \{(\widehat{\varphi}, W \setminus \widehat{\varphi}); \Box\varphi \in w\}$.

A zatem pojedyncze bi-otoczenie to para złożona z *proof*-setu formuły φ i jego dopełnienia, przy założeniu, że $\Box\varphi \in w$.

W [34] znajdujemy wzmiankę o naszej pracy [147], w kontekście operatora $\Box$. Według autorów, sformułowaliśmy na nowo wcześniejszą semantykę mono-modalną Goldblatta i rozszerzyliśmy ją o aksjomat T. Wydaje się nam to nieścisłe: Goldblatt w pracy [51], na którą powołują się włoscy autorzy, aksjomatyzuje (roz. 6.6., pp. 154 - 162) logiki normalne, wyposażone w aksjomat K.

4. Uogólnione topologie jako semantyka dla logik zdaniowych

4.1. **Rys ogólny.** Ta część naszej pracy koncentruje się na strukturach, które powstają poprzez osłabienie typowych założeń, które przyjmowane są w odniesieniu do przestrzeni topologicznej. W tym kontekście istotne są również rodziny rozważane w obrębie standardowych przestrzeni, ale o własnościach uboższych niż zbiory otwarte. Wreszcie, pewne znaczenie (choć nie kluczowe) mają dla nas także topologie osadzone w uniwersach innych niż zwyczajnie pojęte zbiory. Tym trzem filarom naszych badań poświęcone jest poniższe wprowadzenie.

4.1.1. *Generalizacje pojęcia topologii.* Bez wątpienia *topologia* jest jednym z ważniejszych narzędzi w semantyce logik nieklasycznych: w szczególności logik modalnych oraz intuicjonizmu i systemów nadbudowanych nad intuicjonizmem (tzw. logik pośrednich *vel* superintuicjonistycznych). Można to dość łatwo i przekonująco uzasadnić. Otóż nader popularne modele otoczeniowe i relacyjne są co prawda bardzo pożyteczne i wygodne, ale w pewnym sensie abstrakcyjne. W swych prostych i podstawowych formach jawią się niekiedy jako odległe od tych obiektów, które wielu matematyków uważa za naturalne. Do takich zaliczyć można np. liczby (*nomen omen*) naturalne i wymierne, prostą rzeczywistą, płaszczyznę rzeczywistą (lub zespoloną), zbiór Cantora czy niektóre przestrzenie funkcyjne (jak choćby przestrzenie funkcji ciągłych).

Semantyka algebraiczna jest bliższa tym fundamentalnym intuicjom, ale dopiero przy zastosowaniu topologii można w bardzo bezpośredni sposób powiązać świat logiki formalnej ze wspomnianymi wyżej obiektami. Standardowym przykładem może być tu twierdzenie udowodnione przez McKinseya i Tarskiego [87] - o pełności zdaniowej logiki intuicjonistycznej względem algebry zbiorów otwartych dowolnej w sobie gęstej topologicznej przestrzeni metrycznej. Ci sami autorzy dowiedli też (w pracy [88]), że bardzo ważny w zastosowaniach system logiki modalnej **S4** jest logiką nie tylko całej klasy przestrzeni topologicznych, ale i prostej rzeczywistej, zbioru liczb wymiernych czy zbioru Cantora [18].

Z drugiej strony, o topologii warto mówić także i dlatego, że struktury otoczeniowe czy relacyjne, jeżeli spełniają odpowiednio silne założenia, mogą być postrzegane jako przestrzenie topologiczne.

Otóż to: topologia jest pojęciem dość "silnym". Świadczy o tym choćby to, że klasie wszystkich przestrzeni topologicznych odpowiada dopiero wspomniana wyżej logika **S4**, a więc system położony relatywnie wysoko w hierarchii logik modalnych, w szczególności ponad bazowym dla logik *normalnych* systemem **K**. A przecież oprócz logik normalnych słabszych niż **S4** mamy jeszcze całe uniwersum logik nienormalnych (*non-normal*), w obrębie których wyróżnić można systemy nieregularne, a nawet niemonotoniczne [19]. Naturalne jest więc pytanie o to, czy istnieją jakiekolwiek możliwości wykorzystania narzędzi topologicznych (zapewne po uprzednim ich zredefiniowaniu w konieczny sposób) w odniesieniu do tychże słabych logik. Podobne pytanie dotyczyć może systemów subintuicjonistycznych, czyli słabszych od intuicjonizmu: takich, w których rezygnuje się np. z aksjomatów *ex falso quodlibet* (logika minimalna Johanssona) czy *a fortiori*, a nawet z reguły *modus ponens*.

---

[18] Aby mówić o pełności musimy oczywiście określić nie tylko przestrzeń, w której będziemy pracować, ale i zasady spełniania (*wymuszania*) formuł. W kwestii rozumienia prawdziwości w semantyce topologicznej istnieje jednak pewien konsensus. Będzie to wyjaśnione w dalszej części tekstu.

[19] Monotoniczność ma w logice kilka znaczeń. W tym wypadku chodzi o spełnianie tzw. reguły monotoniczności, czego nie należy mylić ani z pojęciem monotoniczności konsekwencji (por. logiki *niemonotoniczne* Makinsona), ani z monotonicznością wymuszania formuł w relacyjnych modelach intuicjonistycznych.

Uogólnienia i rozszerzenia pojęcia topologii badane są od dawna, przy czym motywacje, które kierowały badaczami zaangażowanymi w tę tematykę były na ogół dalekie od zastosowań logiki formalnej. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, by wykorzystać dla naszych potrzeb niektóre z tych koncepcji. Z całej gamy tego rodzaju pomysłów mniejszy lub większy wpływ na nasze rozważania miały [20]:

- *pre-topologie* wprowadzone w roku 1947 przez Choqueta [21]. Przestrzeń pretopologiczną można postrzegać jako uniwersum W wyposażone w rodzinę filtrów w taki sposób, że: każdemu punktowi w przestrzeni przypisany jest filtr $\mathcal{V}(w)$; a zarazem w należy do każdego zbioru $V \in \mathcal{V}(w)$. Elementy tegoż $\mathcal{V}(w)$ nazywamy *otoczeniami* punktu w. Liczne zastosowania pretopologii (m.in. w modelowaniu ekonomicznym, analizie danych, rozpoznawaniu obrazów czy badaniu podobieństwa różnych obiektów) opisane zostały w pracy Quanga Vu Bui [116], który zresztą wynalezienie tych przestrzeni przypisuje Brissaudowi, nazywając go "ojcem pretopologii", i przenosi na rok 1975 (Choqueta natomiast nie cytuje w ogóle).
- *perytopologie* Ahmeta i Terzilera [2]. Tu również zakłada się, że każdemu punktowi przypisany jest filtr na W, zawierający otoczenia tegoż punktu. Tym razem może to jednak być filtr *niewłaściwy* (tj. cały zbiór potęgowy $\mathcal{P}(W)$), a poza tym punkt nie musi należeć do każdego swego otoczenia. W szczególności może znajdować się poza wszystkimi swoimi otoczeniami.
- *topologie zredukowane* w sensie M. C. C. Grácio (por. [52]): są to rodziny domknięte na *skończone* sumy i takież przekroje, przy czym zakłada się, że uniwersum jest otwarte, ale zbiór pusty *nigdy* nie jest otwarty. Struktury te (także pod nazwą *pseudo-topologii*) wykorzystywane są są jako semantyka dla tzw. logik wiarygodności (ang. *logics of the plausible*, port. *lógicas do plausível*). Do tych rachunków jeszcze wrócimy.
- *uogólnione topologie* w sensie Császára, zaprezentowane w [30]. Uogólniona topologia to każda taka rodzina podzbiorów przestrzeni, która jest domknięta na dowolne sumy (w tym na sumę pustą, zatem $\emptyset$ zawsze jest otwarty w tym sensie).
- *supra-topologie* - z ich definicji, podanej przez Masshoura [86], wynika, że są one tożsame z wprowadzonymi później *silnymi* topologiami uogólnionymi Császára, tj. takimi, w których oprócz domknięcia rodziny na dowolne sumy przyjmuje się jeszcze otwartość całego uniwersum.
- *infra-topologie* przedstawione (pod tą nazwą) przez Al-Odhariego w [97]. Infra-topologia to rodzina domknięta na skończone przekroje, do której poza tym należą zbiór pusty i cała przestrzeń. Rodzina ta nie musi być domknięta na sumy, nawet skończone.
- *σ-struktury* Kima i Mina, ogłoszone w [76]. To bardziej ogólny wariant topologii Császára. Są to mianowicie rodziny domknięte przynajmniej na niepuste sumy; zbiór pusty nie musi jednak do takiej rodziny należeć (ale może).
- *dobre* (?) topologie. Tłumaczenie jest być może niezręczne, w oryginale są to *fine topological spaces*[21]. Wprowadzili je Powar i Rajak w [112]. Idea jest taka: wychodzimy od (standardowej) przestrzeni topologicznej (W, τ). Następnie budujemy rodziny postaci:
  $\tau(A_\alpha) = \tau_\alpha = \{G_\alpha(\neq W); G_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset, A_\alpha \in \tau, A_\alpha \neq \emptyset, A_\alpha \neq W, \alpha \in J \neq \emptyset\}$.

[20] Lista nie aspiruje do miana kompletnej prezentacji wszystkich istniejących uogólnień pojęcia topologii; pomijamy np. topologie Grothendiecka, generalizację Delfsa i Knebuscha, przestrzenie merotopiczne, pseudo-topologie Shulmana, a także struktury syntopogeniczne Császára.

[21] Słowo "fine" może oznaczać "ładny", "delikatny", "cienki", "udany" etc.

Wreszcie określamy $\tau_f = \{\emptyset, W, \bigcup_{\alpha \in J} \tau_\alpha\}$. Ta ostatnia rodzina to właśnie fine-topologia generowana na uniwersum W przez topologię τ. Taka fine-topologia niekoniecznie jest topologią, ale zawsze jest uogólnioną topologią (w sensie Császára).

Zapis powyższy należy prawdopodobnie[22] rozumieć tak: bierzemy po kolei każdy zbiór otwarty niepusty i różny od W, sprawdzamy z którymi niepustymi podzbiorami W (różnymi od W) ma on przekrój niepusty, a następnie zbieramy w jednej kolekcji te właśnie zbiory (po wszystkich zbiorach z τ).

Zacytujmy przykład z [112]. Niech $W = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Wtedy $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{b\}$, $A_\gamma = \{a, b\}$. Dalej $\tau_\alpha = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\tau_\beta = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, $\tau_\gamma = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Zatem $\tau_f = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Powar i Pratibha Dubey w [111] piszą z pewną emfazą: "(...) owa kolekcja dobrych zbiorów otwarych [fine open sets] jest zaiste magiczną klasą podzbiorów przestrzeni X, zawiera bowiem zbiory semi-otwarte, pre-otwarte, α-otwarte, β-otwarte etc."

- *przestrzenie relatorowe* w rozumieniu Száza (por. [128], [129]). Taka przestrzeń to po prostu para $\langle W, \mathcal{R} \rangle$, gdzie $\mathcal{R}$ to rodzina relacji binarnych na W. W tym bardzo ogólnym środowisku autor wprowadza odpowiedniki wnętrza i domknięcia.
- *struktury minimalne* zaproponowane przez Maki w [84] (lub też w [85] przy współudziale Umehary i Noiri). Są to struktury bardzo proste w swym zamyśle: to takie podzbiory $\mathcal{P}(W)$, do których należą (oprócz, być może, innych zbiorów) $\emptyset$ i W.

  Z pojęciem struktury minimalnej wiążą się zresztą liczne nieporozumienia. Terminu tego używali m.in. Popa i Noiri, np. w pracy [94], jednak oprócz wspomnianych już warunków zakładali jeszcze domkniętość owych rodzin na dowolne sumy. To oznaczałoby ich utożsamienie z supratopologiami, silnymi topologiami uogólnionymi Császára oraz z uogólnionymi topologiami Lugojana, przedstawionymi w [82]. Takie struktury autorzy ci zalecali określać w skrócie m-strukturami.

  Z drugiej strony, tenże Noiri (wraz z Al-Omarim) w pracy [95] mianem m-struktur (ale nie struktur minimalnych!) określa rodziny zawierające zbiór pusty i całe uniwersum, a do tego domknięte na skończone przekroje. Tę definicję m-struktur (tożsamą z infra-topologiami Al-Odhariego) Noiri powtórzył (wraz z Modakiem) w pracy [96]. Tam jednak strukturami minimalnymi nazwano te rodziny, od których wyszliśmy, tj. określone przez to, że mieszczą w sobie przynajmniej $\emptyset$ i W. Tego ostatniego (i zarazem pierwszego) rozumienia "struktury minimalnej" będziemy się trzymać w niniejszej rozprawie. Możemy jedynie ubolewać nad panującym chaosem terminologicznym.
- *struktury słabe* omówione przez Császára w pracy [32]. Jedyną konstytutywną cechą tych rodzin jest to, że wśród ich elementów musi znajdować się $\emptyset$.
- *uogólnione struktury słabe* zdefiniowane pod tą nazwą w pracy Ávili i Moliny [5]. Taka struktura to dowolna niepusta rodzina zbiorów zawarta w danym uniwersum. Znacznie wcześniej w tym kierunku podążył Kim-Leong Lim, który już w roku 1964 przyjął, że uogólnioną topologią może być dowolny niepusty podzbiór zbioru potęgowego (por. [75]).

[22] Jeżeli mamy rację, to zapis ten powinien zostać uściślony, by było jasne, że indeksami z J oznaczamy *wszystkie* zbiory z τ, a nie tylko niektóre.

Jak łatwo zauważyć, zabiegi wspomnianych wyżej autorów zmierzają ku temu, by narzucać badanym rodzinom coraz słabsze warunki. U niektórych matematyków, specjalizujących się w analizie czy teorii miary, tak słabe struktury mogą budzić nieufność, w każdym razie jeżeli wcześniej nie mieli z nimi do czynienia. Warto zatem zaznaczyć, że dla większości tego rodzaju generalizacji sformułowano już warianty tradycyjnych pojęć topologicznych (takich jak np. ciągłość, gęstość, nigdziegęstość, metryka, zwartość, spójność, zupełność czy zbieżność) oraz wprowadzono aksjomaty oddzielania i inne praktyczne narzędzia (bada się nawet uogólnione grupy topologiczne).

Wartość tego rodzaju dociekań leży choćby w tym, że pozwalają one określić minimalne warunki wystarczające do zdefiniowania wyżej wymienionych własności. Wyniki te mogą również stanowić impuls do (nieco filozoficznej) dyskusji nad tym, jakie ograniczenia uważamy za konieczne, by móc w sensowny sposób mówić o nadaniu "matematycznej struktury" abstrakcyjnym rodzinom zbiorów. Jest to w istocie pytanie o granice i elastyczność pojęcia "analogii": o to, dlaczego godzimy się (lub nie) na to, by pewne "słabe" obiekty i cechy uważać mimo wszystko za odpowiedniki innych, silniejszych i zarazem "klasycznych".

Co więcej, pewni autorzy nie poprzestają na definiowaniu tych narzędzi i sprawdzaniu ich podstawowych własności, ale wprost stosują je do modyfikowania i rozwiązywania problemów z innych dziedzin. Przykładem może być tu grupa polskich badaczy (por. [78], [81]), którzy we *frameworku* uogólnionych topologii Császára umieszczają zaawansowane problemy analizy funkcjonalnej, związane np. z grami Banacha. Z kolei w [80] autorzy z tego kręgu analizują zagadnienie entropii we wspomnianych przestrzeniach.

Poza tym struktury słabsze od topologii wykorzystuje się przy grupowaniu elementów i podzbiorów w uniwersach skończonych. To z kolei ma bardzo praktyczne zastosowanie w informatyce, a dzięki temu także w ekonomii i wszędzie tam, gdzie klasyfikuje się dane. Mamy tu na myśli takie obszary jak: formalna analiza pojęć (*formal concept analysis*), w tym modelowanie procesu gromadzenia wiedzy i uczenia się (zob. [124], [41]); biometria (oraz w ogólności rozpoznawanie obrazów i wzorców, zob. [43]); analiza wielokryterialna (MCDM). Dotyczy to zwłaszcza pretopologii i przestrzeni Császára, ale nie tylko.

Szeroki wykład na temat rozmaitych generalizacji pojęcia topologii dał Singha w swojej pracy doktorskiej [122]. Obejmuje ona m.in. uogólnione topologie Császára, struktury minimalne i struktury słabe. W przestrzeniach tych autor bada warianty lematu Urysohna i inne klasyczne twierdzenia.

4.1.2. *Zbiory słabo otwarte.* Uogólnione topologie w sensie Császára wywodzą się poniekąd (por. [108]) z rozważania (w odniesieniu do standardowo pojętej operacji topologicznego wnętrza) pewnych klas zbiorów spełniających tylko niektóre kryteria otwartości. Chodzi m.in. o zbiory:

- *α-otwarte*: $A \subseteq Int(Cl(Int(A)))$. Odpowiadają im $Int_\alpha(A) = A \cap Int(Cl(Int(A)))$ oraz $Cl_\alpha(A) = A \cup Cl(Int(Cl(A)))$.
- *semi-otwarte*: $A \subseteq Cl(Int(A))$. Odpowiadają im $Int_\sigma(A) = A \cap Cl(Int(A))$ oraz $Cl_\sigma(A) = A \cup Int(Cl(A))$.
- *pre-otwarte*: $A \subseteq Int(Cl(A))$. Odpowiadają im $Int_\pi(A) = A \cap Int(Cl(A))$ oraz $Cl_\pi(A) = A \cup Cl(Int(A))$.
- *β-otwarte*: $A \subseteq Cl(Int(Cl(A)))$. Odpowiadają im $Int_\beta(A) = A \cap Cl(Int(Cl(A)))$ oraz $Cl_\beta(A) = A \cup Int(Cl(Int(A)))$.

Jeśli takie klasy zdefiniuje się w zwyczajnej przestrzeni topologicznej, to każda z nich będzie topologią uogólnioną (zaś zbiory α-otwarte będą nawet tworzyć zwykłą topologię). Dodajmy tu, że w wymienionych przez nas wcześniej *frameworkach* rozważa się również słabe odpowiedniki powyższych klas, tzn. przyjmuje się te same definicje, ale przy założeniu, że wnętrze i domknięcie pojmowane są np. na sposób Császára.

Ta licząca cztery punkty lista, którą tu zaprezentowaliśmy, nie wyczerpuje oczywiście bogactwa wszystkich koncepcji. Wyróżnia się jeszcze wiele innych takich podrodzin. Nie jest to szczególnie zaskakujące. Nie ma też potrzeby podawania wielu przykładów, niech nas zadowolą kolejne cztery (por. [105]). Otóż jeżeli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną (standardową), to możemy wyróżnić m.in. zbiory:

- *b-otwarte*: $A \subseteq Int(Cl(A)) \cup Cl(Int(A))$ (wprowadzone przez Andrijevica w [3]).
- **b-otwarte*: $A \subseteq Cl(Int(A)) \cap Int(Cl(A))$.
- $b^{\#}$*-otwarte*: $A = Cl(Int(A)) \cup Int(Cl(A))$.
- typu $D(c, \alpha)$: $Int(A) = \alpha(Int(A))$, gdzie $\alpha(Int(A)) = A \cap Int(Cl(Int(A)))$. Zostały one wyznaczone przez polskiego autora Przemskiego w [113].

Za ciekawe można uznać pytanie o charakterze kombinatorycznym: ile różnych zbiorów można uzyskać, posługując się rozmaitymi uogólnieniami pojęć wnętrza i domknięcia? W tym kontekście jako cenna jawi się praca Gupty i Dev Sarmy (por. [54]). Autorzy dowodzą w niej, że jeżeli w standardowej przestrzeni topologicznej mamy dany zbiór A, to przy pomocy czterech słabych wariantów operacji wnętrza (i tyluż wariantów domknięcia)[23] można uzyskać z A *co najwyżej* 25 różnych zbiorów, uwzględniając sam A. Zakłada się przy tym, że owe operacje mogą być składane w dowolnej kolejności.

Gupta i Dev Sarma podają nawet przykład takiej przestrzeni i takiego zbioru, że istotnie da się z niego wygenerować owych 25 różnych zbiorów. Rzecz przedstawia się tak:

Przykład 4.1. Niech $X = \mathbb{R}$, zaś topologia będzie naturalną topologią liczb rzeczywistych. Zbiór A definiujemy jako:
$A = \{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup [[1, 3] \setminus \{2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}] \cup [(5, 7] \cap (\mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi})] \cup (-3, -2]$.

Twierdzenie podane przez wspomnianych autorów nawiązuje do bardziej znanego twierdzenia Kuratowskiego o 14 zbiorach (por. [70]), które odnosiło się do standardowo pojętego domknięcia (i brania dopełnień).

4.1.3. *Topologie alternatywne.* Oprócz *uogólnień* klasycznie pojętej topologii, pojawiły się również koncepcje (roboczo nazwiemy je *alternatywnymi*), które niekoniecznie rezygnują ze standardowych aksjomatów, ale za to przenoszą je na uniwersa inne niż typowy zbiór potęgowy z tradycyjnie zdefiniowanymi działaniami sumy i przekroju.

Można tu wymienić np.:[24]

- *topologie binarne* Jothi i Thangavelu [65], będące uogólnieniem znanego pojęcia topologii produktowej: o ile topologia produktowa to podrodzina $P(W \times U)$ (a więc określona jest na zbiorze potęgowym produktu przestrzeni), o tyle topologia binarna zawiera się w produkcie zbiorów potęgowych, tj. w $P(W) \times P(U)$, zatem jej elementami są pary zbiorów. Całościowy wykład można znaleźć w [66].

  Formalnie rzecz przedstawia się tak: topologią binarną z W w U nazywamy rodzinę $M \subseteq P(W) \times P(U)$ taką, że $(\emptyset, \emptyset), (W, U) \in M$, $(A_1 \cap$

[23] Chodzi o $Int_{\gamma}(A)$ i $Cl_{\gamma}(A)$, gdzie $\gamma = \alpha, \sigma, \pi, \beta$.

[24] Także i ta lista nie aspiruje do miana wyczerpującej. Pomijamy np. n-topologie pojęte tak jak w pracy [74].

$A_2, B_1 \cap B_2) \in M$ zawsze, gdy $(A_1, B_1) \in M, (A_2, B_2) \in M$, a poza tym $\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha, \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) \in M$, o ile do M należy każdy element rodziny $\{(A_\alpha, B_\alpha) : \alpha \in \Delta\}$, gdzie Δ to pewien zbiór indeksów.

Autorzy (we wspomnianej pracy [65]) podkreślają, że wprowadzone przez nich pojęcie jest niezależne od topologii produktowej. Ta ostatnia staje się binarną tylko, gdy utożsamimy $\emptyset$ z parą $(\emptyset, \emptyset)$. Z drugiej strony, rozważają oni taki przykład: $W = \{a, b, c\}, U = \{1, 2, 3, 4\}$. Wtedy $\{(\emptyset, \emptyset), (\{a\}, \emptyset), (W, U)\}$ to topologia binarna, niemniej nie można jej uznać za produktową. Mało sensowne byłoby bowiem utożsamienie pary $(\{a\}, \emptyset)$ z $\{a\}$ czy też z $\{\emptyset\}$.

- *topologie n-arne* Seethalakshmi i Kamaraja (zob. [120]). Są one naturalnym rozszerzeniem topologii binarnych na n uniwersów. W kontekście wcześniejszych rozważań dodajmy, że ciekawe byłoby zbadanie topologii produktowej przestrzeni n-arnych, czego - jak dotąd i wedle naszej wiedzy - nie zrobiono.
- *topologie multizbiorowe*, wprowadzone przez Girisha i Jacoba Johna w [49] i [50]. Są to po prostu przestrzenie topologiczne osadzone w świecie multizbiorów, a nie zwykłych zbiorów. Jak wiadomo, w standardowej teorii zbiorów zakłada się, że każdy element występuje tylko raz, jest unikalny: w tym sensie, że ewentualny zapis $\{a, a, a, b, b, c\}$ utożsamiamy z $\{a, b, c\}$. W multizbiorach dopuszcza się wielokrotne występowanie identycznych elementów, tak więc nie wystarczy, by zostały wypisane elementy zbioru: należy jeszcze określić ich liczbę pojawień się. Na takim uniwersum rekonstruuje się standardową topologię (z pojęciami ciągłości, zwartości etc.).
- *N-topologie* Thivagara, przedstawione w [135]. Załóżmy, że mamy niepuste uniwersum W, wyposażone w N dowolnych topologii $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$. Definiujemy kolekcję $N\tau$ następująco:

  $N\tau = \{S \subseteq W; S = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right), A_i, B_i \in \tau_i\}$.

  Spełnia ona warunki, których oczekuje się od topologii. Elementy tej kolekcji nazywamy zbiorami $N\tau$-otwartymi. W szczególności dla $N = 2$ otrzymujemy zbiory postaci $(A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$, gdzie $A_1, B_1 \in \tau_1, A_2, B_2 \in \tau_2$.

  Rozważmy jeszcze prosty przykład zaczerpnięty z odnośnego artykułu, tym razem dla $N = 3$. Niech $W = \{a, b, c, d\}$ oraz $\tau_1 = \{W, \emptyset, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{W, \emptyset, \{b, d\}\}$, $\tau_3 = \{W, \emptyset, \{c, d\}\}$. Wtedy:

  $3\tau(W) = \{W, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$.

Na odrębnej liście wyliczymy różnego rodzaju topologie, które osadza się w uniwersum zbiorów modelujących niepewność (nie w sensie prawdopodobieństwa, a raczej rozmytości). Są to np. przestrzenie topologiczne[25]:

- *rozmyte*, w których pracuje się z najbardziej znanymi zbiorami rozmytymi (*fuzzy sets*) Zadeha. Wykład teorii znaleźć można np. w [92].
- *szare*, wprowadzone przez Zhimina i Zukai (zob. [151]), a oparte na zbiorach szarych (*grey sets*) Denga.
- *mgliste*, analizowane np. w [106] i bazujące na zbiorach mglistych (*vague sets*) Gau i Buehrera.
- *intuicjonistyczne* Çokera przedstawione w [24]. Pracuje się tu z tzw. zbiorami intuicjonistycznymi (zob. [23]), które w rzeczywistości są parami zbiorów rozłącznych A_T i A_F; zbiory te nie muszą sumować się do całej przestrzeni i dlatego pełnią dla siebie wzajemnie rolę pseudo-uzupełnień, stąd pewna analogia z intuicjonizmem.

  Zbiory intuicjonistyczne to zdefiniowany przez Çokera szczególny, mianowicie dyskretny (*crisp*), przypadek intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova [4]. Przyjmuje się, że jeśli $A = [A_T, A_F]$ i $B = [B_T, B_F]$ to

[25] Co ciekawe, wydaje się, że nie zajmowano się dotąd topologiami opartymi na zbiorach cieniowanych (*shadowed sets*) Pedrycza.

dwa zbiory intuicjonistyczne, wówczas $A \cup B = [A_T \cup B_T, A_F \cap B_F]$ oraz $A \cap B = [A_T \cap B_T, A_F \cup B_F]$. Definicja topologii jest standardowa, tyle że w odniesieniu do tych specyficznych zbiorów i operacji na nich.

Analogia pomiędzy logiką intuicjonistyczną (czy też filozofią matematycznego intuicjonizmu) a zbiorami Atanassova i Çokera jest zresztą dość słaba. Przedyskutowali ją i ocenili krytycznie Cattaneo i Ciucci w [17].

Dodajmy, że Ciucci proponuje w [22], by zbiory intuicjonistyczne utożsamiać z orto-parami (*orthopairs*). O związkach pomiędzy zbiorami przybliżonymi (*rough sets*) Pawlaka, orto-parami, logiką i algebrą obszernie pisze Boffa w pracy doktorskiej [11]. Z kolei w [36] opisano podstawowe własności przestrzeni intuicjonistycznych w ich wariancie wyjściowym, tj. rozmytym. Te zresztą również zostały wprowadzone przez Çokera, mianowicie w [25].

- *podwójne* - tu przedmiotem rozważań są tzw. zbiory podwójne (*double sets, flou sets*) rozumiane jako pary zbiorów takie, iż jeden z nich zawiera się w drugim (por. [68]). Innymi słowy, taki zbiór ma postać $\underline{A} = [A_1, A_2]$, gdzie $A_1 \subseteq A_2$. Inaczej niż w przypadku zbiorów intuicjonistycznych, przy sumowaniu (krojeniu) dwóch zbiorów podwójnych sumuje się (kroi) zarówno pierwsze, jak i drugie elementy obu par. W rzeczywistości jednak istnieje odpowiedniość pomiędzy double setami i zbiorami intuicjonistycznymi: wystarczy przypisać każdemu double setowi zbiór intuicjonistyczny $[A_1, -A_2]$.

  Sam Çoker w pośmiertnie wydanej pracy [8] (napisanej wraz z Bayhanem) godzi się na to, by zbiory intuicjonistyczne (rozumiane jako pary zbiorów o pustym przekroju) nazywać właśnie *double setami.* Nawiasem mówiąc, w pracy tej mamy też zaprezentowaną zależność pomiędzy intuicjonistycznymi (podwójnymi) przestrzeniami topologicznymi a bitopologiami w sensie Kelly'ego (zob. [73]). Otóż jeżeli (W, τ) to intuicjonistyczna przestrzeń topologiczna, wówczas przestrzenią bitopologiczną będzie (W, τ_1, τ_2) z topologiami określonymi jako:
  $\tau_1 = \{A_1;$ istnieje $A_2 \subseteq X$ taki, że $A = [A_1, A_2] \in \tau\}$,
  $\tau_2 = \{-A_2;$ istnieje $A_1 \subseteq X$ taki, że $A = [A_1, A_2] \in \tau\}$.
- *nano* Thivagara i Richarda [134]: taka topologia zależna jest od ustalonego zbioru X zawartego w skończonym uniwersum W oraz od pewnej relacji równoważności R na W [26]. Przyjmując, że $R(w)$ to klasa równoważności punktu w, wyróżnia się się trzy zbiory:
  $L_R(X) = \bigcup_{w \in W}\{R(w); R(w) \subseteq X\}$,
  $U_R(X) = \bigcup_{w \in W}\{R(w); R(w) \cap X \neq \emptyset\}$,
  $B_R(X) = U_R(X) \setminus L_R(X)$.
  Dwa pierwsze to zbiory elementów będących w X "na pewno" i "być może" (ze względu na relację R); trzeci to tzw. region brzegowy X. Okazuje się, że piątka $\langle W, \emptyset, L_R(X), U_R(X), B_R(X)\rangle$ zawsze jest przestrzenią topologiczną (nazywa się ją nano-topologią). Nad tym fundamentem nadbudowana jest bardziej złożona teoria (m.in. z pewnymi zastosowaniami w dziedzinie klasyfikacji obiektów i podejmowania decyzji, zwłaszcza w diagnostyce medycznej). Systematyczny wykład teorii i zastosowań znaleźć można w [15]. Warto zauważyć niewątpliwą analogię pomiędzy przybliżeniami $L_R(X)$ i

[26] Parę $\langle W, R\rangle$ nazywa się przestrzenią aproksymacji. Jest to konstrukcja znana z teorii zbiorów Pawlaka, jedynie zaadaptowana przez wzmiankowanych autorów. Człon "nano" w nazwie jest mylący, bo przywodzi na myśl popularną nanotechnologię. Intencją Thivagara było zaakcentowanie faktu, że jego topologie są "małe", bo zawsze co najwyżej pięcio-elementowe. Analogia wydaje się jednak niezbyt trafna: "nano" powinno się odnosić raczej do niewielkich "rozmiarów" badanych obiektów, a nie do ich niedużej ilości. Istnieje zresztą praca Thivagara, mianowicie [136], w której omawiane struktury są nazywane po prostu *rough*-topologiami.

$U_R(X)$ a podmodelami stosowanymi w logikach publicznego obwieszczania.

- *mikro* Chandrasekara, zaprezentowane w [20] i badane później m.in. w [58]. Jest to uogólnienie nano-topologii. Jeżeli $\langle W, \tau_R(X)\rangle$ to nano-topologia na W zależna od X, to dla ustalonego zbioru $\mu \notin \tau_R(X)$ zdefiniować można rodzinę $\mu_R(X) = \{N \cup (N' \cap \mu); N, N' \in \tau_R(X)\}$. Ta rodzina to właśnie mikrotopologia (zależna od $\tau_R(X)$ i zbioru μ).
- *Kasaj* zdefiniowane w [71]. Ta nieco osobliwa nazwa nawiązuje najprawdopodobniej do imion obu autorów (Kashyap i Sajeed). W istocie przestrzenie te są pewnym uogólnieniem czy też rozszerzeniem mikrotopologii. Idea jest taka: jeżeli $\langle W, \tau_R(X)\rangle$ jest przestrzenią nanotopologiczną, zaś S, S' to pewne ustalone zbiory takie, że $S, S' \notin \tau_R(X)$ oraz $S \cup S' = W$, wtenczas topologią Kasaj nazywamy rodzinę $KS_R(X) = \{(K \cap S) \cup (K' \cap S') : K, K' \in \tau_R(X)\}$.

  Przykład (za [72]): niech $W = \{a, b, c, d, e\}$, $W/R = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}\}$ oraz $X = \{d, e\}$. Wtedy możemy określić nanotopologię:
  $\tau_R(X) = \{\emptyset, W, \{d\}, \{b, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$.
  Teraz rozważmy $S = \{a, b, d\}$ oraz $S' = \{c, e\}$. Wtedy:
  $KS_R(X) = \{\emptyset, \{c\}, \{e\}, \{c, e\}, \{b, e\}, \{a, b, d\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, W\}$.

  Jak można się domyślać, sumy elementów takiej rodziny oraz skończone ich przekroje również do niej należą.
- *miękkie* Shabira i Naza (por. [121]) oparte na zbiorach miękkich Molodtsova, wprowadzonych w [89]. Zbiór miękki nad uniwersum X i ze zbiorem parametrów E to para (F, A), gdzie $A \subseteq E$ oraz $F : A \to \mathcal{P}(X)$. W szczególności może być tak, że $A = E$. Molodtsov daje następujący przykład: X to zbiór domów, które rozważamy pod kątem nabycia. E to zbiór parametrów wyrażonych słownie:
  $\{$*drogi*, *tani*, *ładny*, *drewniany*, *otoczony zielenią*, *nowoczesny*, *w dobrym stanie*, *do remontu*$\}$.
  W tym przypadku określeniem zbioru miękkiego byłoby po prostu wyróżnienie domów tanich, drogich, ładnych etc. Podobny przykład daje Hamza w [55], tyle że w odniesieniu do metali (pierwiastków) i ich własności (takich jak przewodnictwo elektryczne czy ciągliwość). Nawiasem mówiąc, także zbiór rozmyty Zadeha może być postrzegany jako "soft". Mało tego, takim zbiorem jest również rodzina otwartych otoczeń punktu w przestrzeni topologicznej. Jest to więc pojęcie bardzo ogólne.

  Można dodać, że zupełnie niedawno ukazała się praca Burç Kandemira i Tanaya [67], w której autorzy definiują topologiczne zbiory miękkie inaczej niż Shabir i Naz.

Wypada jednak zaznaczyć, że nowe generacje zbiorów modelujących szeroko pojętą "rozmytość" bywają zdradliwe. Nie czujemy się specjalistami w tej dziedzinie, niemniej nawet pobieżny przegląd tej tematyki pozwala zauważyć prace, w których autorzy wykazują, iż określone koncepcje są "nadmiarowe", tj. zbędne z czysto matematycznego punktu widzenia. I tak np. w [14] czytamy, że zbiory mgliste w istocie można traktować jako intuicjonistyczne zbiory rozmyte. Z kolei Shi i Pang pokazują w [127], że miękkie przestrzenie topologiczne są izomorficzne ze zwykłymi topologiami na produkcie $X \times E$.

Takich wyników jest więcej. Pokaźną ich liczbę zebrano w [44] (gdzie odrzucono nawet zbiory Atanassova). Oczywiście fakt, że jedne koncepcje da się tłumaczyć na inne, nie przesądza jeszcze o bezużyteczności zapisów - czy to w zastosowaniach praktycznych, czy to w roli obrazu ułatwiającego myślenie lub prowokującego wartościowe intuicje i skojarzenia.

Podobnie rzecz się ma z multizbiorami. Otóż Ghareeb w [47] wykazał, że topologia multizbiorowa jest szczególnym przypadkiem zwyczajnej. Pewne uwagi krytyczne co do tej tezy poczynili Rajish Kumar i Jacob John w [60], wskazując, że izomorfizm podany przez Ghareeba zachowywał sumy i przekroje, ale nie dopełnienia i prowadził w taką rodzinę zwykłych zbiorów, w której nie było zbiorów domknięto-otwartych.

Zaprezentowane w niniejszym wprowadzeniu klasy przestrzeni są w najrozmaitszy sposób łączone (bada się np. binarne przestrzenie nano-topologiczne, zob. [57], uogólnione topologie binarne, rozpoznane niezależnie w [93] i [1], a poniekąd - w wersji supra, tj. z otwartym uniwersum - także w [137], topologię miękkich *double setów*, zob. [133], czy bi-struktury słabe, zob. [114]). Nie ma tu w zasadzie żadnych ograniczeń. Rzecz jasna w uniwersach tych bada się też analogony rodzin słabo otwartych (domkniętych). Zagadnienia owe w większości wykraczają poza obszar analizowany w niniejszej pracy. Zaprezentowaliśmy je natomiast po to, by uświadomić czytelnikowi, jak liczne są we współczesnej matematyce redefinicje dobrze znanego pojęcia topologii. Nie podejmujemy się też oceny wszystkich tych pomysłów, a tym bardziej ich połączeń. Wydaje się, że podstawowe koncepcje mają zazwyczaj pewien potencjał (niekoniecznie wykorzystywany przez autorów), natomiast ich konglomeraty robią wrażenie nieco sztucznych[27].

Dygresja 4.2. Można w pewien sposób połączyć idee stojące za zbiorami intuicjonistycznymi i podwójnymi. Wspomnieliśmy co prawda, że jedne są drugim równoważne - ale tylko dlatego, że w obu tych *frameworkach* inaczej wykonuje się podstawowe operacje. Spróbujmy zamiast tego skrzyżować te wizje w jedną, dość specyficzną. Przyjmijmy mianowicie, że pracujemy z *double setami*, ale wykonujemy na nich działania analogiczne do tych, które obowiązują w zbiorach intuicjonistycznych. Należy oczywiście nałożyć odpowiednie ograniczenia, tak aby rozważane operacje istotnie były działaniami.

Wyjaśnijmy wpierw naszą motywację. Jest ona dość praktyczna i wiąże się z problemem modelowania dyskusji bądź negocjacji. Wyobraźmy sobie, że mamy zbiór podwójny $A = [A^1, A^2]$, przy czym zbiory A^1 i A^2 zawierają pewne argumenty, formuły, scenariusze, przedmioty czy inne *elementy*, względnie *obiekty* (dwóch ostatnich słów będziemy używać najczęściej). Jeżeli obiekty te uznajemy *co najmniej* za możliwe (czy też dopuszczalne, tj. znajdujące się w orbicie rozważań), to trafiają one do A^2. Jeżeli uznajemy je za konieczne (obowiązkowe, nieodzowne), to umieszczamy je w A^1. Naturalne jest więc przyjęcie, że A^1 zawiera się w A^2 (co jest konieczne, jest bowiem możliwe; co jest obowiązkowe, jest dopuszczalne). Możemy zatem w przypadku każdego zbioru podwójnego mówić o *zbiorze konieczności* i *zbiorze dopuszczalności*. Rzecz jasna w $A^2 \setminus A^1$ znajdą się te obiekty, którym nadajemy dokładnie drugą rangę, tj. z pewnością nie uznajemy ich za konieczne.

Przyjmijmy teraz, że mamy dwa zbiory podwójne A i B. Rozważmy następujące nowe obiekty (i zarazem operacje):

$[A^1 \cap B^1, A^2 \cup B^2]$

[27]Tym bardziej dotyczy to takich pomysłów jak badanie przestrzeni wyposażonych w trzy, cztery i więcej topologii (a jednak niektórzy to robią, por. tzw. *tri*, *quad* czy *penta topological spaces*). Trudno sobie wyobrazić, czy uzyskane w ten sposób wyniki mogą znacząco się różnić od tych dla zwykłych topologii, ew. bitopologii lub ogólnego środowiska, w którym mielibyśmy n topologii. W najlepszym razie wybór konkretnego n może skutkować jakimiś niuansami kombinatorycznymi - tak przynajmniej podejrzewamy.

$[(A^1 \cup B^1) \cap (A^2 \cap B^2), A^2 \cap B^2]$

W naszej interpretacji zbiory podwójne to punkty widzenia różnych graczy, dyskutantów czy też agentów. Każdy ma swoją pulę obiektów koniecznych i - być może szerszą - pulę obiektów możliwych. Ściślej: każdy pewne obiekty w uniwersum postrzega na jeden z dwóch możliwych sposobów (być może wszystkie, ale oczywiście nie musi oceniać wszystkich).

Ci dyskutanci wchodzą ze sobą w interakcje. Nasze *zbiory negocjacyjne* (bo tak będziemy je nazywać) obrazują dwa warianty kompromisu między dwoma dyskutantami. Pierwszy jest taki: *mniej* rzeczy pozostaje koniecznych czy też priorytetowych, a więcej staje się dopuszczalnych. Drugi wariant jest poniekąd odwrotny. Poniekąd, bo musimy mieć pewność, że "zasięg konieczności" nowego obiektu zawierać będzie się w jego "zasięgu możliwości", tj. że znów dostaniemy *double set*. Dlatego kroimy $A^1 \cup B^1$ z przekrojem A^2 i B^2.

Operacje, które wiodą do tych nowych obiektów, można uogólnić. Jeżeli $\{A_j : j \in J\}$ to indeksowana rodzina zbiorów negocjacyjnych na uniwersum X, to określamy:

$\odot_{j \in J} A_j = [\bigcap_{j \in J} A_j^1, \bigcup_{j \in J} A_j^2]$
$\oplus_{i \in J} A_j = [\bigcup_{j \in J} A_j^1 \cap \bigcap_{j \in J} A_j^2, \bigcap_{j \in J} A_j^2]$

Można pokazać, że jeżeli $\{A_j ; j \in J\}$ jest rodziną zbiorów negocjacyjnych, zaś B również jest takim zbiorem, to:

(1) Jeżeli $A_j \subseteq B$ dla każdego $j \in J$, wtedy $\odot_{j \in J} A_j \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \subseteq B$.
(2) Jeżeli $B \subseteq A_j$ dla każdego $j \in J$, wtedy $B \subseteq \bigcap_{j \in J} A_j \subseteq \oplus_{j \in J} A_j$.

Dla $J = \{1, 2\}$ otrzymujemy to, co już znamy:

$A \odot B = [A^1 \cap B^1, A^2 \cup B^2]$,
$A \oplus B = [(A^1 \cup B^1) \cap (A^2 \cap B^2), A^2 \cap B^2]$.

Rozważania niniejsze zamieszczamy w ramach dygresji, a nie osobnego rozdziału. Po pierwsze, odbiegają od głownego nurtu pracy. Nie widzimy np. powodu, dla którego na tym etapie mielibyśmy zbiory negocjacyjne wyposażać w topologię lub podobną strukturę, nie jest zresztą jasne, którą operację należy uznać za analogiczną do sumy, a którą za odpowiednik przekroju. Po drugie, badania te są dopiero na wczesnym etapie.

To, co warto zrobić, to sprawdzić strukturę przestrzeni zbiorów negocjacyjnych z operacjami $\oplus$ i $\odot$. Z dotychczasowych naszych dociekań wynika, że to struktura nieco słabsza od kraty, bo z jednym tylko prawem pochłaniania, mianowicie $A \oplus (A \odot B) = A$. Kontr-przykład dla drugiego prawa to $A^1 = \{x\}, A^2 = \{x\}, B^1 = \{b\}, B^2 = \{b\}$. Czytelnik może sprawdzić, że $A \odot (A \oplus B) = [\emptyset, \{x\}] \neq A$.

Kontr-przykłady dla dystrybutywności:

i) Jeżeli A, B, C takie, że $A^1 = \{x\}, A^2 = \{a, x\}$, $B^1 = \{b\}, B^2 = \{b, d\}$, $C^1 = \{c\}, C^2 = \{c, x\}$, to:
$(A \oplus B) \odot (A \oplus C) = [\emptyset, \{x\}] \neq A \oplus (B \odot C) = [\{x\}, \{x\}]$.
ii) Jeżeli A, B, C takie, że $A^1 = \{a\}, A^2 = \{a\}, B^1 = \{x\}, B^2 = \{x, b\}, C^1 = \{x, a\}, C^2 = \{x, a, c\}$, to:
$A \odot (B \oplus C) = [\emptyset, \{a, x\}] \neq (A \odot B) \oplus (B \odot C) = [\{a\}, \{a, x\}]$.

Sprawdźmy teraz, że nasze działania są łączne. Po pierwsze:

$A \odot (B \odot C) = A \odot [B^1 \cap C^1, B^2 \cup C^2] = [A^1 \cap B^1 \cap C^1, A^2 \cup B^2 \cup C^2] = (A \odot B) \odot C$.
A zatem $\odot$ jest działaniem łącznym.
Po drugie, możemy napisać:

$A \oplus (B \oplus C) = [A^1, A^2] \oplus [(B^1 \cup C^1) \cap (B^2 \cap C^2), B^2 \cap C^2] = [(A^1 \cup ((B^1 \cup C^1) \cap (B^2 \cap C^2))) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2), A^2 \cap B^2 \cap C^2] = [(A^1 \cup B^1 \cup C^1) \cap (A^1 \cup (B^2 \cap C^2)) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2), A^2 \cap B^2 \cap C^2]$.

oraz:

$(A \oplus B) \oplus C = [(A^1 \cup B^1) \cap (A^2 \cap B^2), A^2 \cap B^2] \oplus (C^1, C^2) = [(((A^1 \cup B^1) \cap (A^2 \cap B^2)) \cup C^1) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2), A^2 \cap B^2 \cap C^2] = [(A^1 \cup B^1 \cup C^1) \cap ((A^2 \cap B^2) \cup C^1)) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2), A^2 \cap B^2 \cap C^2]$.

Widać, że prawe części zbiorów wynikowych (ich zbiory dopuszczalności) są identyczne. Różnica może dotyczyć jedynie zbiorów koniecznościowych. Pokażmy zatem, że - przy wszystkich pozostałych założeniach, jakie możemy przyjąć - identyczność lewych stron obu zbiorów wynikowych istotnie zachodzi.

i)Niech zatem $x \in (A^1 \cup B^1 \cup C^1) \cap (A^1 \cup (B^2 \cap C^2)) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2)$. W szczególności znaczy to, że $x \in A^2 \cap B^2 \cap C^2$. Załóżmy nie wprost, że $x \notin (A^1 \cup B^1 \cup C^1) \cap ((A^2 \cap B^2) \cup C^1)) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2)$. Dwie opcje wyłączamy od razu, pozostaje taka, iż $x \notin (A^2 \cap B^2) \cup C^1$. Wtedy jednak $x \notin A^2 \cap B^2$, a to od razu sprzeczność.
ii) Niech teraz $x \in (A^1 \cup B^1 \cup C^1) \cap ((A^2 \cap B^2) \cup C^1)) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2)$. W szczególności znaczy to, że $x \in A^2 \cap B^2 \cap C^2$. Załóżmy nie wprost, że $x \notin (A^1 \cup B^1 \cup C^1) \cap (A^1 \cup (B^2 \cap C^2)) \cap (A^2 \cap B^2 \cap C^2)$. Jedyna możliwość godna rozważenia to taka, że $x \notin A^1 \cup (B^2 \cap C^2)$. To znaczy, że $x \notin A^1$ oraz $x \notin B^2 \cap C^2$. To jednak sprzeczność.
Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że także $\oplus$ jest działaniem łącznym.
Wyróżnijmy dodatkowo trzy specjalne zbiory negocjacyjne na zadanym uniwersum X: $\emptyset_N = [\emptyset, \emptyset]$, $X_P = [\emptyset, X]$ oraz $X_N = [X, X]$. Niech A będzie dowolnym zbiorem negocjacyjnym na tym samym uniwersum. Wówczas:

(1) $A \odot X_N = [A^1, X]$.
(2) $A \odot \emptyset_N = [\emptyset, A^2]$.
(3) $A \oplus X_N = [A^2, A^2]$.
(4) $A \oplus \emptyset_N = \emptyset_N$.
(5) $A \odot X_P = X_P$.
(6) $A \oplus X_P = A$.

A zatem X_P w pewnym sensie pełni rolę algebraicznej czy też kratowej jedynki (tj. **1**), przy założeniu, że $\odot$ i $\oplus$ są odpowiednikami alternatywy i koniunkcji. Z drugiej strony, $\emptyset_N$ tylko częściowo zachowuje się jak algebraiczne **0**: co prawda $A \oplus \emptyset_N = A$, ale niekoniecznie $A \odot \emptyset_N = A$.
Interesujące będzie wzięcie pod uwagę tego, jak mają się do siebie same elementy uniwersum. Można sobie bowiem wyobrazić, iż nasze operacje będą generować jakieś konflikty. Dobry przykład to sytuacja, w której elementami uniwersum są formuły - przy czym okazuje się, że mamy zarówno φ, jak i $\neg\varphi$. Wstępnie proponujemy pewną klasyfikację. Jest to nie tylko klasyfikacja samych obiektów, ale i zbiorów negocjacyjnych: rzecz bowiem w tym, by określić, które zbiory można dopuścić do dyskusji, tj. uznać za prawidłowo zbudowane, "niesprzeczne" lub "nie w pełni sprzeczne". Dwa obiekty $x, y \in W$ mogą być względem siebie:

(1) *silnie* sprzeczne, ozn. $x \wr\!\wr y$. Jeżeli zbiór A ma być dopuszczony do dyskusji, to w jego części A^2 nie mogą znaleźć się żadne pary silnie sprzeczne. To znaczy, że żaden uczestnik dyskusji nie może nawet hipotetycznie przyjąć, iż oba te obiekty są dlań dopuszczalne (a tym bardziej, że któryś z nich jest konieczny).
(2) *słabo* sprzeczne: $x \wr y$. W tym przypadku jest możliwe, że takie dwa elementy znajdą się w zewnętrznej części pewnego zbioru, tj. w $A^2 \setminus A^1$, ale żaden z nich nie może przebywać w A^1. Obrazuje to sytuację, w której uczestnik dyskusji może dwa obiekty jako takie, co do których nie nastąpiło jeszcze ostateczne rozstrzygnięcie.

Z czysto teoretycznego punktu widzenia można też wyróżnić takie pary, w których oba elementy nie mogą być naraz w strefie konieczności, ale jeden z nich tak. Nie jest jednak jasne, jak powinno się interpretować taki stan rzeczy: oznaczałoby to bowiem, że dyskutant uznaje za dopuszczalne coś, co jest sprzeczne z czymś innym, co z kolei uważa za konieczne.

Tak czy inaczej, przyjęliśmy tu, iż (silna lub słaba) sprzeczność obiektów jest czymś *obiektywnym*, niezależnym od opinii dyskutantów. Ci mogą jedynie klasyfikować obiekty według swoich własnych kryteriów dopuszczalności i konieczności, ale w taki sposób, by nie złamać zarysowanych wyżej zasad. Można też sobie wyobrazić sytuację, w której sprzeczność obiektów jest czymś relatywnym: konflikt między x i y zależałby podówczas od punktu widzenia. Naturalnie w takim wypadku każdy zbiór negocjacyjny (reprezentujący pojedynczego dyskutanta) byłby dopuszczony do dyskusji: fakt, że w A^1 i A^2 znajdują się takie, a nie inne elementy, oznaczałby, że najwidoczniej nie są one z punktu widzenia danego gracza kontrowersyjne. Nadal jednak pozostawałaby kwestia interakcji pomiędzy graczami, a więc ich zbiorami: tzn. należałoby ustalić, w jaki sposób unika się sprzeczności w nowych zbiorach powstających przy pomocy operacji $\odot$ i $\oplus$. Ten sam problem dotyczy też oczywiście podejścia traktującego sprzeczność elementów jako fenomen obiektywny.

Zarysowany tu kierunek badań wydaje się obiecujący. Stosunkowo łatwo można sobie wyobrazić praktyczne przykłady (np. negocjowanie koszyka akcji, które dyskutanci chcą nabyć na giełdzie). W naturalny sposób nasuwa się też pomysł programu komputerowego, pracującego na bazie takiego *frameworku*. Oczywiście $\odot$ i $\oplus$ mogłyby być rozpatrywane razem ze standardowymi operacjami sumy i przekroju dla *double setów*, w wyniku czego mielibyśmy rozbudowany system z czterema działaniami.

Wyobrażamy sobie również wyposażenie zarysowanego środowiska w topologię: przy czym wydaje się, że odpowiednikiem sumy powinna być operacja $\oplus$ (jako sumująca zbiory dopuszczalności), zaś odpowiednikiem przekroju - operacja $\odot$.

Jeszcze innym rozwinięciem tematu byłoby przekształcenie naszych zbiorów (z odpowiednio zmodyfikowanymi operacjami $\odot$ i $\oplus$) w zbiory n-krotnie zagnieżdżone, tj. takie, że $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n$, co dawałoby możliwość obrazowania wielu, a nie tylko dwóch, poziomów akceptacji obiektów.

Uwaga 4.3. Powyższe rozważania zostały już uzupełnione o dalsze pojęcia i prawidłowości. Efektem jest praca, której pre-print dostępny jest w repozytorium arxiv (por. [145]) - i która została przesłana do pisma Journal of New Theory, gdzie oczekuje na recenzję[28].

4.1.4. *Związki z logiką.* Wspomniane w niniejszym wprowadzeniu przestrzenie (zarówno uogólnione jak i alternatywne) są (wedle wszelkiej naszej wiedzy) rzadko

[28]Stan na dzień 18 lutego 2021.

wykorzystywane w logice formalnej, a przynajmniej w takim sensie, o jakim będziemy mówić w kolejnych rozdziałach. Innymi słowy, rzadko (lub wcale) są stosowane jako modele dla logik nieklasycznych; nieczęsto spotyka się je w kontekście takich zagadnień[29] jak pełność semantyczna, charakteryzacja własności topologicznych przy pomocy formuł, bisymulacje i p-morfizmy, własność skończonego modelu, własność dyzjunkcji, rozstrzygalność, translacja między systemami logicznymi czy teoria unifikacji.

Trzeba jednak wspomnieć, że w czasie naszych badań sporadycznie natrafiliśmy na autorów specjalizujących się w logice, którzy wprowadzali (powodowani praktyczną potrzebą) pewne struktury, w istocie tożsame np. z uogólnionymi topologiami Császára (*casusy* Soldano [124] i jego *ekstensjonalnych abstrakcji* oraz Järvinena, Kondo i Kortelainena [62], posłużyli się oni pojęciem *systemu wnętrz*). Autorzy ci albo nie mieli świadomości istnienia całej szkoły badań topologicznych nad takimi przestrzeniami, albo ograniczali się do krótkich przypisów, być może uznając, że na danym etapie nie dostrzegają potrzeby sięgania po dostępne narzędzia. Umacnia nas to w przekonaniu, że warto głębiej przeanalizować tematykę, o której mowa. Dodajmy jeszcze, że o semantyce pretopologicznej pisał Sambin, m.in. w [117].

Pewnymi wyjątkami od reguły są wspomniane wcześniej topologie zredukowane Grácio i pery-topologie Ahmeta i Terzilera. Te bowiem struktury pomyślano *stricte* jako praktyczne narzędzia logiczne; zaś (o ile wiemy) słabo zbadane są te ich aspekty, które mogłyby interesować topologów, nie mówiąc o specjalistach od analizy.

Uogólnione struktury mogą zainteresować logików, a w każdym razie sądzimy, że powinny przyciągnąć ich uwagę. Kluczowe jest tu pojęcie *otoczenia* (*neighbourhood*). Otóż w zwykłej topologii otoczenie (otwarte) jest mocnym pojęciem. Mamy na myśli fakt, że otoczenia punktu tworzą filtr, a w dodatku punkt zawsze należy do przekroju swych otoczeń. Tymczasem w semantyce otoczeniowej dla logik modalnych otoczenie punktu (świata możliwego) to dowolny podzbiór uniwersum, przypisany temu punktowi - być może nawet w bardzo arbitralny sposób. Zbiorów, które składają się na rodzinę otoczeń świata, może nic nie łączyć. Jednym z otoczeń (a nawet jedynym) może być zbiór pusty. Ba, nawet i cała rodzina może być pusta. W takim razie koncepcje przedstawione wyżej jawią się jako kuszący *ersatz* zwykłej topologii.

Oczywiście w swych najbardziej ogólnych postaciach, bez żadnych specjalnych założeń, struktury te nie zawsze są użyteczne czy tym bardziej ciekawe. Rzecz zasadza się na tym, by wszelkie dodatkowe ograniczenia nakładać możliwie "subtelnie" - tzn. tak, aby z jednej strony móc już już coś powiedzieć o interesujących podklasach, a z drugiej - nie przejść do pojęć lokujących się poziom wyżej, czyli np. nie zmienić uogólnionej topologii Császára w zwyczajną (albo struktury słabej w minimalną).

W kolejnych rozdziałach zdefiniujemy przedstawione wyżej przestrzenie i rodziny w sposób formalny. Dla niektórych, w szczególności dla uogólnionych topologii Császára i infra-topologii, znajdziemy pewne interpretacje logiczne. W trybie dygresji zajmiemy się już teraz wspomnianymi wyżej topologiami zredukowanymi.

Dygresja 4.4. Nie będziemy zbyt głeboko wnikać w filozoficzną motywację, jaka stoi za logikami wiarygodności w rozumieniu Grácio i kontynuatorów dzieła tej autorki. W podstawowej swojej formie logika $\mathcal{L}(P)$ to logika pierwszego rzędu, bazująca na logice klasycznej, ale wyposażonej w nowy kwantyfikator P. Aksjomaty $\mathcal{L}(P)$ przedstawiają się tak:

[29] Zbiory rozmyte i przybliżone w takich kontekstach się spotyka, nam jednak chodzi o przestrzenie topologiczne na nich oparte.

(1) $(Px\varphi(x) \wedge Px\psi(x)) \rightarrow Px(\varphi(x) \wedge \psi(x))$.
(2) $(Px\varphi(x) \wedge Px\psi(x)) \rightarrow Px(\varphi(x) \vee \psi(x))$.
(3) $\forall x\varphi(x) \rightarrow Px\varphi(x)$.
(4) $Px\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$.
(5) $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Px\varphi(x) \leftrightarrow Px\psi(x))$.
(6) $Px\varphi(x) \rightarrow Py\varphi(y)$, y wolna za x w $\varphi(x)$.

Ów nowy kwantyfikator $P(x)\varphi(x)$ w zamyśle twórców ma być czytany jako "dla znacznej części x-ów zachodzi $\varphi(x)$" albo też "istnieje wystarczająco wiele x-ów, by zachodziło $\varphi(x)$".

Semantyką dla tego systemu są wspomniane wcześniej topologie zredukowane *vel* pseudo-topologie. W pracach [13] i [53] przedstawiono wariant zdaniowy logiki wiarygodności, tzn. zdaniową, klasyczną, modalną logikę o tej samej semantyce pseudo-topologicznej. My zaprezentujemy intuicjonistyczny odpowiednik tego rachunku, nawiązując do technik wypracowanych w części trzeciej. Modele nie bęą wprost pseudo-topologiczne: raczej relacyjno-otoczeniowe.

Aksjomatami modalnymi naszego systemu $\mathbf{iL}(\Box)$ będą, podobnie jak w przypadku klasycznym:

(1) C, tj. $\Box\varphi \wedge \Box\psi \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$.
(2) H, tj. $\Box\varphi \vee \Box\psi \rightarrow \Box(\varphi \vee \psi)$.
(3) T, tj. $\Box\varphi \rightarrow \varphi$.
(4) N, tj. $\Box\top$.

Jedyne reguły to *modus ponens* i ekstensjonalność operatora $\Box$. Dodajmy, że w [53] postuluje się $\Box(\varphi \vee \neg\varphi)$ zamiast N.

Modelem relacyjno-otoczeniowym logiki $\mathbf{iL}(\Box)$ nazywać będziemy czwórkę $\langle W, \leqslant, \mathcal{N}, V\rangle$, w której funkcja otoczeniowa spełnia następujące warunki:

(1) $[X \in \mathcal{N}_w$ oraz $Y \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{N}_w$.
(2) $[X \in \mathcal{N}_w$ lub $Y \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{N}_w$.
(3) $X \in \mathcal{N}_w \Rightarrow w \in X$.
(4) $W \in \mathcal{N}_w$.
(5) $[w \leqslant v, X \in \mathcal{N}_w] \Rightarrow X \in \mathcal{N}_v$.
(6) $[X \in \mathcal{N}_w, X \subseteq Y] \Rightarrow Y \in \mathcal{N}_w$.

Wartościowanie zmiennych zdaniowych jest oczywiście intuicjonistyczne. Ostatni z zaprezentowanych warunków to "wbudowana" suplementacja. Wymuszanie formuł modalnych jest typowe:

$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$.

W modelu kanonicznym przyjmiemy, że uniwersum W to zbiór wszystkich teorii relatywnie maksymalnych naszej logiki, zaś częściowy porządek $\leqslant$ to relacja zawierania się tychże teorii. Otoczenia zdefiniujemy mniej więcej tak jak w modelu dla systemu $\mathbf{iM^{W}pn}$.

$\mathcal{N}_w = \{X \subseteq W;$ istnieje $Y \in n_w$ taki że $Y \subseteq X\}$, gdzie $n_w = \{\widehat{\varphi}; \Box\varphi \in w\}$.

Można sprawdzić, że to istotnie model logiki $\mathbf{iL}(\Box)$. Na przykład drugi warunek wykazuje się przy pomocy aksjomatu H, trzeci na mocy T, a czwarty dzięki N. Nietrudno też dowieść warunku monotoniczności i suplementacji. Korzysta się przy tym z potrzebnych własności spełnianych przez n_w dla każdego $w \in W$.

Faktu, że w modelu kanonicznym $w \Vdash \gamma \Leftrightarrow \gamma \in w$ dowodzi się indukcyjnie, przy czym przypadek $\gamma := \Box\varphi$ przebiega tak:

(1) z jednej strony, jeżeli $w \Vdash \Box\varphi$, to $\{z \in W; z \Vdash \varphi\} \in \mathcal{N}_w$, czyli z założenia indukcyjnego $X = \{z \in W; \varphi \in z\} \in \mathcal{N}_w$. Zatem istnieje $Y \in \backslash_w$ taki, że $Y \subseteq X$, przy czym Y ma postać $\widehat{\psi}$ dla pewnej ψ takiej, że $\Box\psi \in w$. Zarazem $\vdash \psi \rightarrow \varphi$, więc (z ekstensjonalności) $\vdash \Box\psi \rightarrow \Box\varphi$. Przez odrywanie i dlatego, że w jest teorią, otrzymujemy $\Box\varphi \in w$.

(2) z drugiej strony, jeżeli $\Box\varphi \in w$, to $\widehat{\varphi} \in n_w$, ale w takim razie również $\widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$. Przez indukcję, $\{z \in W; z \Vdash \varphi\} \in \mathcal{N}_w$. To jednak oznacza z definicji, że $w \Vdash \Box\varphi$.

Tematyka logik wiarygodności (w sensie przedstawionym powyżej), zarówno zdaniowych, jak i pierwszego rzędu, rozwijana jest, wedle naszej wiedzy, głównie przez grono autorów brazylijskich. Część z tych prac publikowana jest w języku portugalskim.

4.2. **Uogólnione przestrzenie Császára.** W tym rozdziale skoncentrujemy się na zagadnieniach czysto topologicznych. To znaczy, że rozważania logiczne (czyli zastosowania prezentowanych struktur) umieszczone zostały dopiero w rozdziale kolejnym. Tyczy się to w szczególności $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur, które tutaj rozpatrywane są (tymczasowo) w oderwaniu od stojących za nimi intuicji wywiedzionych z logiki.

Definicja 4.5. [30], [31] Załóżmy, że W to dowolny zbiór niepusty (tzw. *uniwersum przestrzeni*), zaś $\mu \subseteq \mathcal{P}(W)$. Mówimy, że rodzina μ jest *uogólnioną topologią* (w sensie Császára) na W wtedy i tylko wtedy, gdy μ jest domknięta na dowolne sumy. To znaczy: jeżeli J jest zbiorem indeksów (być może pustym) oraz dla każdego $i \in J$ mamy $X_i \in \mu$, to $\bigcup_{i \in J} X_i \in \mu$.

Parę $\langle W, \mu \rangle$ nazywamy *uogólnioną przestrzenią topologiczną* ($\mathbf{GT}$-przestrzenią). Jest ona:

- *silna* lub *supra-topologiczna* wtedy, gdy $W \in \mu$.
- *topologiczna* (w zwykłym sensie), gdy jest silna oraz domknięta na skończone przekroje, tzn. jeśli $X_1, X_2 \in \mu$, to $X_1 \cap X_2 \in \mu$.

Elementy μ nazywamy *zbiorami μ-otwartymi*, przy czym w tej części pracy zazwyczaj będziemy mówić po prostu o zbiorach otwartych (wyróżniając w sposób szczególny raczej zbiory otwarte w sensie zwykłej topologii). Przez $\bigcup \mu$ rozumieć będziemy (co zresztą wynika z tego zapisu) największy zbiór otwarty (sumę wszystkich zbiorów otwartych). Punkty ze zbioru $W \setminus \bigcup \mu$ nazywać będziemy *osieroconymi* (*orphaned*).

Wnętrzem zbioru $A \subseteq W$ nazwiemy $Int(A)$, tj. największy mieszczący się w A zbiór otwarty (sumę wszystkich zbiorów otwartych, które zawarte są w A).

Zbiór $A \subseteq W$ nazwiemy *domkniętym* wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie (tj. $W \setminus A$) jest otwarte. Definiujemy $Cl(A)$ (*domknięcie* A) jako najmniejszy zbiór domknięty, w którym zawiera się A.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, warunek domknięcia na dowolne sumy implikuje otwartość zbioru pustego, tzn. $\emptyset \in \mu$.

W odniesieniu do wnętrza i domknięcia można przytoczyć (w ślad za [31] i po dostosowaniu do naszej notacji) następujące proste lematy:

Lemat 4.6. *Załóżmy, że $\langle W, \mu \rangle$ to $\mathbf{GT}$-przestrzeń, $A, B \subseteq W$. Wówczas:*

(1) Jeśli $A \subseteq B$, to $Int(A) \subseteq Int(B)$.
(2) $Int(A) \subseteq A$.
(3) $Int(Int(A)) = Int(A)$.

Lemat 4.7. *Załóżmy, że $\langle W, \mu \rangle$ to $\mathbf{GT}$-przestrzeń, $A, B \subseteq W$. Wówczas:*

(1) Jeśli $A \subseteq B$, to $Cl(A) \subseteq Cl(B)$.
(2) $A \subseteq Cl(A)$.
(3) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$.

Lemat 4.8. *Załóżmy, że $\langle W, \mu \rangle$ to $\mathbf{GT}$-przestrzeń, $A \subseteq W$. Wówczas:*
$Cl(A) = W \setminus Int(W \setminus A)$.

Wszystkie te lematy są prawdziwe także dla zwykłych topologii. Warto jednak odnotować, że w przypadku przestrzeni Császára przekrój wnętrz dwóch zbiorów nie musi być tożsamy z wnętrzem przekroju tychże zbiorów; i analogicznie suma domknięć nie musi być równa domknięciu sumy.

Oczywiście sama koncepcja rodzin domkniętych na dowolne sumy nie jest nowa: w istocie sięga ona korzeniami początków minionego stulecia. Owe kolekcje są bowiem dualne do tzw. *rodzin Moore'a*, wprowadzonych w [91]. Te z kolei wyznaczyć można przez operator domknięcia rozumiany tak jak później u Császará czy u McKinseya i Tarskiego (zob. [88]), a więc w sposób słabszy niż w topologii. Idea ta wróciła w pracy Pelega [107], w której rodzinę zbiorów domkniętą na sumy nazwano semi-topologią.

Wydaje się jednak, że dopiero Császár rozpoczął systematyczne badanie struktur, o których mowa. Dziedzina ta jest obecnie - po ponad dwudziestu latach od pierwszych prac węgierskiego autora na ten temat - bardzo rozbudowana. Można chyba bez przesady powiedzieć, że wyposażono ją w odpowiedniki większości klasycznych pojęć, przynajmniej tych podstawowych. Naszym celem nie jest jednak systematyczny wykład tej teorii. Taki przegląd czytelnik może znaleźć np. w pracach doktorskich Baskarana [7] i Jehangira [63]. Będziemy raczej prezentować własne pojęcia, porównując je - tam, gdzie będzie to owocne - z terminami i wynikami Császára lub innych autorów.

Uwaga 4.9. Wypada zaznaczyć jeszcze jeden fakt, aby uniknąć nieporozumień. Tarski używał uogólnionego domknięcia jako operatora konsekwencji. Jeżeli mamy zbiór formuł $\mathfrak{F}$, to wówczas $\varphi \in Cl(\mathfrak{F})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony podzbiór $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \subseteq \mathfrak{F}$ taki, że $\{\gamma_1, ...\gamma_n\} \models \varphi$ (gdzie $\models$ oznacza wynikanie semantyczne, acz można też użyć symbolu syntaktycznego $\vdash$). Z drugiej strony, w kontekście logiki modalnej używał standardowego (tj. topologicznego, a nie uogólnionego) pojęcia wnętrza. Innymi słowy, akceptował fakt, że przekrój wnętrz jest wnętrzem przekroju. Wtedy jednak odwoływał się nie do "struktury dowodu" czy sposobu rozumienia "wynikania logicznego", ale do wartościowania formuł postaci $\Box\varphi$. Zakładał mianowicie, że jeżeli przestrzeń topologiczna jest modelem dla logiki modalnej, to $V(\Box\varphi) = Int(V(\varphi))$. Nas interesuje właśnie zastąpienie topologicznego wnętrza w tym kontekście - wnętrzem uogólnionym. Konsekwencja w rozważanych przez nas systemach będzie natomiast rozumiana tak jak u Tarskiego, w sposób bardzo klasyczny.

Każda zwyczajna przestrzeń topologiczna jest w szczególności przestrzenią uogólnioną, ale wartościowe poznawczo będzie dopiero zaprezentowanie takich **GT**-przestrzeni, które nie są domknięte na skończone przekroje. Poniższe przykłady zaczerpnięte zostały w większości z dostępnej literatury:

Przykład 4.10. [9], [10], [119], [150]

(1) $W = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}\}$.
(2) $W = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.
(3) $W = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
(4) $W = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, W\}$.
(5) $W = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, W\}$.
(6) $W = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, W\}$.

Przykład 4.11. [9], [10], [150]

(1) $W = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
(2) $W = \{a, b, c, d\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, W\}$.
(3) $W = \mathbb{R}$, $\mu = \{\emptyset, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R} \setminus \{2\}, \mathbb{R}\}$.
(4) $W = \mathbb{R}$, $\mu = \{A \subseteq \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\}$ (tzw. $\mathbb{Z}$-*forbidden* **GT**).
(5) W dowolny, $\emptyset \neq X \subseteq W$, $\mu = \{A \subseteq W; A \subseteq W \setminus X\}$ (uogólnienie powyższej).

(6) $W = I_{2n} = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$, $\mu = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq W; |A| \geqslant n\}$.
(7) $W = \mathbb{Z}$, $\mu = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 5, 7\}, ...\}$.
(8) $W = \{a, b, c, d\}$, $\mu = \mathcal{P}(W) \setminus \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.
(9) $W = \mathbb{R}$, $\mu = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R}; A \setminus \{w\} \subseteq A$ dla pewnego $w \in \mathbb{R}\}$ (tzw. kosingletonowa **GT**, uogólnienie przestrzeni z wcześniejszego punktu; w istocie zbiorami otwartymi są tu, prócz pustego, wszystkie takie podzbiory $\mathbb{R}$, które nie są singletonami).

Przykład 4.12. [119]

(1) W jest dowolnym zbiorem nieprzeliczalnym, $v \notin W$, $W^* = W \cup \{v\}$, $\mu = \{\emptyset, \{v\} \cup \{W \setminus A\}; A \subseteq W, |A| \leqslant \omega_0\}$, jako **GT**-przestrzeń traktujemy $\langle W^*, \mu\rangle$.
(2) W jest dowolnym zbiorem nieskończonym, $v \notin W$, $W^* = W \cup \{v\}$, $w \in W$, $\mu = \{\emptyset, W \setminus \{w\}, \{v\} \cup (W \setminus A); A \subseteq W, |A| < \omega_0\}$, jako **GT**-przestrzeń traktujemy $\langle W^*, \mu\rangle$.

Przykład 4.13. [131]

(1) $W = \mathbb{R}$, $\Lambda = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, μ to kolekcja wszystkich sum zbiorów należących do Λ.
(2) $W = \mathbb{R}$, $U \in \mu \Leftrightarrow U$ otwarty w sensie zwykłej topologii na $\mathbb{R}$ oraz istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $(a, a + 2) \subseteq U$.

Przestrzenie zaprezentowane w powyższych przykładach niekoniecznie są trywialne, nawet jeśli niektóre sprawiają wrażenie bardzo prostych. Większość z nich to przykłady i kontrprzykłady dla różnych własności, związanych np. z aksjomatami oddzielania czy zależnościami między zbiorami otwartymi i domkniętymi. Do niektórych z tych własności dojdziemy siłą rzeczy w toku naszego wywodu. Dla przykładu dwie ostatnie przestrzenie z przykładu pierwszego to tzw. *door spaces*, co oznacza, że topologia (uogólniona) jest w nich zbudowana tak, iż każdy podzbiór W staje się domknięty lub otwarty. Z kolei druga przestrzeń w ostatnim przykładzie jest Hausdorffa (*per analogiam* do pojęcia znanego ze zwykłej topologii).

Warto też zacytować istotną charakteryzację uogólnionych topologii. W tym celu wprowadzimy pewną definicję i odnośne twierdzenie.

Definicja 4.14. [108] Załóżmy, że W to niepuste uniwersum. Operator $\mathfrak{f} : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ nazwiemy *monotonicznym*, jeśli z faktu, iż $A \subseteq B$ wynika, że $\mathfrak{f}(A) \subseteq \mathfrak{f}(B)$. Zbiór A nazwiemy $\mathfrak{f}$-*otwartym*, jeżeli $A \subseteq \mathfrak{f}(A)$.

Twierdzenie 4.15. [108] *Dla dowolnego monotonicznego operatora $\mathfrak{f}$ rodzina $\mathfrak{f}$-otwartych zbiorów jest zawsze uogólnioną topologią. Z drugiej strony, każda uogólniona topologia zadana jest przez pewien monotoniczny operator $\mathfrak{f}$, tzn. istnieje taki $\mathfrak{f}$, że rozważana topologia jest tożsama z kolekcją wszystkich $\mathfrak{f}$-otwartych zbiorów.*

Okazuje się, że zawsze można założyć, iż $\mathfrak{f}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathfrak{f}(A) \subseteq A$ oraz $\mathfrak{f}\mathfrak{f}(A) = \mathfrak{f}(A)$.

4.2.1. **GT**$\mathcal{F}$*-struktury.* Uniwersum każdej **GT**-przestrzeni postrzegać można jako sumę mnogościową dwóch zbiorów: $\bigcup \mu$ i $W \setminus \bigcup \mu$. Jeżeli przestrzeń jest silna, to ten drugi zbiór jest pusty (pierwszy natomiast musi być niepusty, bo z definicji rozpatrujemy niepuste uniwersum). Jeżeli jednak przestrzeń nie jest silna, to $W \setminus \bigcup \mu$ jest niepusty (z kolei $\bigcup \mu$ może być pusty, aczkolwiek to bardzo specyficzny przypadek, w którym jedynym zbiorem otwartym jest $\emptyset$). Mamy zatem dwa rodzaje punktów: te, które są w *jakimś* otoczeniu otwartym (w szczególności w największym) - i te, które nie są w żadnym otoczeniu.

Ten stan rzeczy z pewnej perspektywy jest kłopotliwy, a z innej ma zalety. Można sobie jednak wyobrazić sytuację "pośrednią", tzn. taką, w której punkty z $W \setminus \bigcup \mu$

są mimo wszystko w jakiś sposób powiązane z topologią. Nasuwają się od razu dwa bardzo ogólne rozwiązania.

Pierwsze podejście to wprowadzenie czegoś na kształt rozmytości (np. funkcji przynależności, która poszczególnym punktom przypisywałaby stopień "bycia w $\bigcup\mu$"). W tym celu moglibyśmy wykorzystać np. narzędzia aproksymacyjne z teorii *rough setów* - te same, które używane są w nano-topologii. Wówczas moglibyśmy rozpatrywać punkty na pewno nie będące w zbiorze $\bigcup\mu$ i te będące w nim "być może" lub "blisko niego". Osobną kwestią byłoby to, w jaki sposób bycie "blisko" $\bigcup\mu$ przekładałoby się na posiadanie otoczeń otwartych lub "częściowego dostępu" do nich.

Druga opcja - i nią będziemy się zajmować w naszej pracy - to mniej lub bardziej arbitralne przypisanie każdemu punktowi osieroconemu pewnej kolekcji zbiorów należących do topologii. Co prawda trudno wówczas hierarchizować te punkty pod względem tego, "jak bardzo" są "związane" z topologią, ale za to mamy dużą swobodę w określaniu takich kolekcji.

Sformalizujmy zatem nasze rozważania, przyjmując pewną najszerszą definicję nowych struktur.

Definicja 4.16. Definiujemy **GT**$\mathcal{F}$-strukturę jako trójkę $M_\mu = \langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$, w której μ to uogólniona topologia na W (zatem $\langle W, \mu\rangle$ to **GT**-przestrzeń), zaś $\mathcal{F}$ to funkcja z W w $P(P(\bigcup\mu)$ taka, że:

- Jeżeli $w \in \bigcup\mu$, to $[X \in \mathcal{F}_w \Leftrightarrow X \in \mu$ oraz $w \in X]$ [$\mathcal{F}_w$ to uproszczony zapis symbolu $\mathcal{F}(w)$].
- Jeżeli $w \in W \setminus \bigcup\mu$, to $[X \in \mathcal{F}_w \Rightarrow X \in \mu]$.

Przyjmujemy zatem, że punktom z $\bigcup\mu$ funkcja $\mathcal{F}$ przypisuje ich rodziny otoczeń otwartych, zaś pozostałym punktom - dowolne (być może nawet puste) kolekcje zbiorów z μ. Dodatkowe ograniczenia na $\mathcal{F}$ będą nakładane w toku dalszych rozważań w miarę potrzeby.

Dla wygody będziemy używać skrótowego zapisu zdefiniowanego niżej:

Definicja 4.17. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą oraz $A \in \mu$. Wówczas przyjmujemy, że $A^* = \{z \in W; A \in \mathcal{F}_z\}$.

Zaprezentujemy prosty przykład **GT**$\mathcal{F}$-przestrzeni, bazując na konstrukcji z Przykładu 4.11 (7).

Przykład 4.18. Rozważmy strukturę $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$, gdzie:
$W = \mathbb{Z}$, $\mu = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3,5\}, \{1,3,5,7\}, ...\}$, $\mathcal{F}_n = \emptyset$ dla każdej $n \in 2\mathbb{Z}$.

Zauważmy, że na mocy ogólnej definicji, jeśli n jest nieparzysta, to $\mathcal{F}_n$ staje się po prostu kolekcją otoczeń otwartych tej liczby.

Naturalnie zdefiniowany wyżej obiekt to **GT**$\mathcal{F}$-struktura, aczkolwiek mało ciekawa. Możemy jednak wprowadzić w niej pewne urozmaicenia i prawidłowości, zastępując $\mathcal{F}$ przez:

(1) $\mathcal{F}'$. Wprowadźmy funkcję $\gamma : 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}+1$, gdzie $\gamma(x) = \max\{m; m \in 2\mathbb{Z}+1, m < x\}$. Załóżmy, że:
- jeżeli $n \in 2\mathbb{Z}+1$, to $G \in \mathcal{F}'_n \Leftrightarrow G \in \mu$ oraz $n \in G$.
- jeżeli $n \in 2\mathbb{Z}$, to $G \in \mathcal{F}'_n \Leftrightarrow G \in \mathcal{F}'_{\gamma(n)}$.
Na przykład, $\mathcal{F}'_8 = \mathcal{F}'_{\gamma(8)} = \mathcal{F}'_7 = \{\{1,3,5,7\}, \{1,3,5,7,9\}, \{1,3,5,7,9,11\}, ...\}$.

(2) $\mathcal{F}''$. Idea jest taka sama jak w przypadku $\mathcal{F}'$, ale zamiast γ korzystamy z $\delta(x) = \min\{m; m \in 2\mathbb{Z}+1, m > x\}$. Wtedy $\mathcal{F}''_8 = \{\{1,3,5,7,9\}, \{1,3,5,7,9,11\}, ...\}$.

(3) $\mathcal{F}'''$. Tu znów korzystamy z funkcji γ i jeśli $n \in 2\mathbb{Z}$, to przyjmujemy następującą definicję: $G \in \mathcal{F}'''_n \Leftrightarrow G \in \mu$, $G \neq \emptyset$ oraz $G \notin \mathcal{F}'''_{\gamma(n)+2}$.
Teraz $\mathcal{F}'''_8 = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,3,5\}, \{1,3,5,7\}\}$.

W szóstej części pracy zbadamy w naszym środowisku pewne pojęcia, które są (choć, jak się okaże, niedoskonałymi) odpowiednikami wnętrza i domknięcia. W ogólności resztę owej finalnej części poświecimy badaniu własności $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur. Niektóre z nich nie mają obecnie klarownego zastosowania logicznego, tym niemniej zarówno te struktury, jak i topologiczne twierdzenia ich dotyczące pojawiły się w sposób naturalny. Co więcej, dowiedzione prawidłowości są dość ciekawe i niekoniecznie oczywiste. Tyczy się to np. Twierdzenia 6.14 oraz topologii wyznaczanej przez zbiory $\mathcal{E}$-otwarte.

Na razie ograniczymy się do jednego tylko pojęcia, a i tak zostanie ono tu zaprezentowane jedynie skrótowo. Jeżeli dla każdego punktu z $W \setminus \bigcup \mu$ dysponujemy już rodziną otoczeń otwartych, to naturalnym krokiem jest wypracowanie dla dowolnego zbioru $A \subseteq W$ takiego pojęcia wnętrza, które będzie oparte o funkcję $\mathcal{F}$. W przypadku (uogólnionej) topologii wnętrzem zbioru A jest, jak wiemy, zbiór tych wszystkich punktów, które posiadają przynajmniej jedno otoczenie otwarte zawarte w A. W poniższej definicji odwołujemy się do tej właśnie intuicji:

Definicja 4.19. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą. Załóżmy, że $w \in W$ oraz $A \subseteq W$. Powiemy, że $w \in \mathcal{F}Int(A) \Leftrightarrow$ istnieje $G \in \mathcal{F}_w$ że $G \subseteq A$.

Własności tak określonego $\mathcal{F}$-wnętrza są (bez dodatkowych obostrzeń nałożonych na $\mathcal{F}$) bardzo słabe (zauważmy np., że w nie musi należeć ani do A, ani do G). Zostaną one zbadane, jak to już zapowiedzieliśmy, w części szóstej. My tymczasem, nim przejdziemy do logiki, wprowadzimy jeszcze pojęcia ciągłości.

Teoria uogólnionych topologii obfituje w różne warianty pojęcia ciągłości (już sam Császár wprowadził w [30] dwa, które nie są ze sobą równoważne; jedno z nich wykorzystamy za chwilę). Te, które wprowadzamy poniżej, będą nam potrzebne w kolejnym rozdziale jako narzędzia umożliwiające sensowne zdefiniowanie pewnych wersji pojęcia bisymulacji.

Definicja 4.20. Niech $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu \rangle$ oraz $F_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau \rangle$ będą dwiema $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturami, zaś f funkcją z W_μ w W_τ. Powiemy, że f jest:

- ciągła $\Leftrightarrow \big[G' \in \tau \Rightarrow f^{-1}(G') \in \mu\big]$.
- otwarta $\Leftrightarrow f(G) \in \tau$ dla każdego $G \in \mu$ [30].
- $\mathcal{F}$-ciągła $\Leftrightarrow \big[G' \in \mathcal{F}^\tau_{w'} \Rightarrow f^{-1}(G') \in \mathcal{F}^\mu_w\big]$ dla *wszystkich* $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$ takich, że $f(w) = w'$.
- $\mathcal{F}$-otwarta $\Leftrightarrow [G \in \mathcal{F}^\mu_w \Rightarrow f(G) \in \mathcal{F}^\tau_{w'}]$ dla *wszystkich* $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$ takich, że $f(w) = w'$.

Można dodać, że w uogólnionej topologii ciągłość w sensie zdefiniowanym wyżej (otwartość przeciwobrazów zbiorów otwartych) nie jest równoważna z ciągłością w punkcie, tzn. pojętą tak: funkcja $f : W_\mu \to W_\tau$ jest ciągła (w punkcie / otoczeniowo) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia $Y \subseteq W_\tau$ punktu $f(w) \in W_\tau$ istnieje takie otoczenie punktu $X \subseteq W_\mu$ punktu $w \in W_\mu$, że $f(X) \subseteq Y$. Ta druga ciągłość implikuje pierwszą, ale nie odwrotnie. Wynika to z faktu, że Császár przyjmuje bardzo ogólne pojęcie *otoczenia*: jego "GNS" (*generalized neighborhood system*) to - w odniesieniu do danego punktu $w \in W_\mu$ - dowolna rodzina zbiorów takich, że w należy do każdego z nich. Więcej na ten temat (m.in. o tym, jak "naprawić" tę niedogodność poprzez delikatne wzmocnienie założeń i skorzystanie z otoczeń wyznaczanych przez uogólnioną topologię) czytelnik znajdzie w [30][31].

[30]Dwie pierwsze definicje zaczerpnięte są z [30]. Oczywiście nie różnią się one od tych ze zwykłych topologii.

[31]W tym kontekście trudno ocenić, czy informacja podana w [9] (o równoważności obu tych rodzajów ciągłości) jest poprawna. W pewnym sensie tak, bo autorzy zakładają z góry pracę z otoczeniami *otwartymi*, ale postawienie takiej tezy bez uprzedniego podkreślenia niuansów jawi się jako trochę nieścisłe.

4.3. **Wprowadzenie do zastosowań logicznych.** Ten rozdział poświecony będzie próbom interpretacji modalności (a w mniejszym stopniu - także i subintuicjonistycznej implikacji) we *frameworku* uogólnionych topologii. Zaprezentujemy zarówno rozwiązania najbardziej naturalne, będące przełożeniem standardowych ujęć topologicznych, jak i pewne wariacje (spójnik $\bullet$ i $\mathbf{bGT}\mathcal{F}$-modele, a także **GTf**-modele). Zbadane zostaną zależności pomiędzy naszymi strukturami, a tymi, które uzyskać można na bazie semantyki otoczeniowej, nakładając odpowiednie ograniczenia. Wprowadzone zostaną także trzy warianty pojęcia bisymulacji.

4.3.1. *Silne struktury.* Znamy już definicję **GT**-przestrzeni Császára, w szczególności zaś definicję przestrzeni silnej. Poniżej wykorzystamy ją przy określeniu jednej z naszych struktur:

Definicja 4.21. Silny **GT**-model (**sGT**-model) definiujemy jako trójkę $\langle W_\mu, \mu, V_\mu \rangle$, w której $\langle W, \mu \rangle$ to silna **GT**-przestrzeń, zaś V_μ to funkcja z PV w $\mathcal{P}(W)$ (zatem V_μ to wartościowanie zmiennych zdaniowych).

Dla porządku dodajmy, że *w tym i dwóch następnych podrozdziałach*[32], jeżeli będziemy używać symbolu Y_w, gdzie przez Y rozumiemy dowolny zbiór, a przez w świat, to będzie to domyślnie oznaczać, że $w \in Y$.

Zdefiniujmy teraz wymuszanie złożonych formuł w naszych modelach. Definicja ma charakter indukcji po złożoności formuły. Przypadki spójników boolowskich są standardowe, do modalności odnosimy się poniżej:

Definicja 4.22. W każdym **sGT**-modelu $M = \langle W_\mu, \mu, V_\mu \rangle$, dla każdego świata $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
$w \Vdash_\mu \Box\varphi \Leftrightarrow$ istnieje $G_w \in \mu$ taki że dla każdego $v \in G_w$, $v \Vdash_\mu \varphi$.

Bez dowodu podajemy poniższy prosty lemat, który wiąże modalność z uogólnionym wnętrzem:

Lemat 4.23. *W każdym* **sGT**-*modelu* $M = \langle W, \mu, V_\mu \rangle$*, dla każdego* $w \in W$ *i dla każdego* φ*, zachodzi:* $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow w \in Int(V_\mu(\varphi))$.

4.3.2. *Struktury otoczeniowe odpowiadające silnym topologiom.* W tym podrozdziale rozważymy te modele otoczeniowe, które odpowiadają klasie wszystkich **sGT**-modeli. W istocie są to modele pełne względem logiki **MNT4** (por. [59], [62]). Zauważmy, że w poniższej definicji nie ma warunku $\bigcap \mathcal{N}_w \in \mathcal{N}_w$. Nasze otoczenia nie tworzą filtru - i dlatego nie są w nich ogólnie prawdziwe aksjomaty C i K.

Definicja 4.24. Silny **GT**-model otoczeniowy (**sGTn**-model) definiujemy jako trójkę $\langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ taką że $W \neq \emptyset$, V to funkcja z PV w $P(W)$ oraz $\mathcal{N}$ jest funkcją z W w $P(P(W))$ taką że dla każdego $w \in W$:

(1) $X \in \mathcal{N}_w$ oraz $X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{N}_w$ (*warunek nadzbioru*).
(2) $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$.
(3) $X \in \mathcal{N}_w \Rightarrow \{z \in W; X \in \mathcal{N}_z\} \in \mathcal{N}_w$ (*4-warunek*).

Wymuszanie formuł znów jest standardowe w odniesieniu do spójników boolowskich. Przypadek modalny zdefiniowano poniżej:

Definicja 4.25. W każdym **sGTn**-modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$, dla każdego świata $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$.

Jak widać, oczekujemy, że zbiór wartości formuły będzie jednym z otoczeń $\mathcal{N}_w$. Wtedy będziemy mogli powiedzieć, że formuła jest *konieczna* w świecie w.

---

[32] Ale już nie w kolejnych: tam w czy v w indeksie dolnym będzie jedynie oznaczać jakiś związek między zbiorem a światem.

4.3.3. *Transformacje pomiędzy klasami modeli.* Mając powyższe definicje, możemy pokazać, że każdemu **sGT**-modelowi odpowiada równoważny **sGTn**-model (i *vice versa*). Procedura oparta jest na analogicznej dla zwykłych przestrzeni topologicznych (por. [101]). Zaprezentujemy ją w zarysie.

Z jednej strony, musimy w jakiś sposób wprowadzić uogólnioną topologię w strukturze otoczeniowej.

Twierdzenie 4.26. *Niech $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ będzie* **sGTn***-modelem. Definiujemy μ jako $\{X \subseteq W; w \in X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w\}$. Tak określona rodzina μ jest uogólnioną topologią na W.*

Dowód. Załóżmy, że $\{G_i\}_{i \in J} \subseteq \mu$, gdzie J to pewien zbiór indeksów. Niech $v \in \bigcup_{i \in J} G_i$, co znaczy, że $v \in G_k$ dla pewnego k. Otóż $G_k \in \mathcal{N}_v$ (gdyż $G_k \in \mu$). Ale zarazem $G_k \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$, zatem z warunku nadzbioru mamy, że $\bigcup_{i \in J} G_i \in \mathcal{N}_v$. To znaczy, że $\bigcup_{i \in J} G_i \in \mu$. □

Z drugiej strony, w **sGT**-modelu określamy otoczenia:

Definicja 4.27. Niech $M = \langle W_\mu, \mu, V_\mu \rangle$ będzie **sGT**-modelem. Dla każdego $w \in W_\mu$ określamy następujący zbiór:
$\mathcal{N}_{\mu w} = \{X \subseteq W_\mu;$ istnieje $G_w \in \mu,$ taki że $G_w \subseteq X\}$.

Poniższe dwa twierdzenia dają nam zapowiedzianą wcześniej odpowiedniość:

Twierdzenie 4.28. *Załóżmy, że $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ to* **sGTn***-model. Istnieje wówczas punktowo równoważny* **sGT***-model $M = \langle W_\mu, \mu, V_\mu \rangle$ taki, że dla każdego $w \in W_\mu$, $\mathcal{N}_{\mu w} = \mathcal{N}_w$.*

Dowód. Przyjmujemy wpierw, że $W_\mu = W$ oraz $V_\mu = V$. Jeśli chodzi o μ oraz $\mathcal{N}_{\mu w}$, to definiowane są one jak w twierdzeniach 4.26 i 4.27. Należy oczywiście pokazać, że otoczenia w sensie **sGTn**-modelu są tożsame z ich symulacją w **sGT**-modelu przy pomocy $\mathcal{N}_{\mu w}$.

($\subseteq$) Niech $w \in W$ oraz $X \in \mathcal{N}_{\mu w}$. Istnieje wtedy $G_w \in \mu$ taki że $G_w \subseteq X$. Z definicji μ, $G_w \in \mathcal{N}_w$. Zatem, z warunku nadzbioru, $X \in \mathcal{N}_w$.

($\supseteq$) Niech $w \in W$ oraz $X \in \mathcal{N}_w$. Definiujemy G_w jako $\{v \in W; X \in \mathcal{N}_v\}$. Oczywiście $w \in G_w$. Co więcej, jeśli założymy, że $z \in G_w$, to $X \in \mathcal{N}_z$. Zatem $z \in \bigcap \mathcal{N}_z \subseteq X$. Wtedy $G_w \subseteq X$. Z *4*-warunku wnosimy, że $G_w \in \mu$. Zatem $X \in \mathcal{N}_{\mu w}$.

W odniesieniu do punktowej równoważności, prezentujemy tylko przypadek modalny:

($\Rightarrow$) Niech $w \Vdash \Box\varphi$. Zauważmy, że $V_\mu(\varphi) = V(\varphi)$ (z założenia indukcyjnego), zatem $V_\mu(\varphi) \in \mathcal{N}_w = \mathcal{N}_{\mu w}$. Istnieje więc taki $G_w \in \mu$, że $G_w \subseteq V_\mu(\varphi)$, a stąd $w \Vdash_\mu \Box\varphi$.

($\Leftarrow$) Niech $w \Vdash_\mu \Box\varphi$. Musi więc istnieć taki $G_w \in \mu$, że $G_w \subseteq V_\mu(\varphi)$. Zatem $V_\mu(\varphi) = V(\varphi) \in \mathcal{N}_{\mu w} = \mathcal{N}_w$. Wtedy $w \Vdash \Box\varphi$.

□

Transformacja w drugą stronę przedstawiona została poniżej:

Twierdzenie 4.29. *Niech $M = \langle W_\mu, \mu, V_\mu \rangle$ będzie* **sGT***-modelem. Istnieje wtedy punktowo równoważny* **sGTn***-model $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ taki że $w \in W$, $\mathcal{N}_w = \mathcal{N}_{\mu w}$.*

Dowód. Powinniśmy oczywiście przyjąć, że $W = W_\mu$ oraz $V = V_\mu$. Co więcej, uogólnione otoczenia topologiczne możemy umieścić w roli **sGTn**-otoczeń. Szczegóły pomijamy, są one zbliżone do toku postępowania z poprzedniego twierdzenia. □

Dygresja 4.30. Wiadomo, że przy pomocy zbiorów otwartych i otoczeń modelować można nie tylko modalność, ale i implikację. W istocie to właśnie robiliśmy w naszych modelach dla logik intuicjonistyczno-modalnych. Ten sposób myślenia powtórzymy w środowisku uogólnionej topologii. Poniżej skorzystamy z silnych **GT**-struktur. Założymy, na potrzeby niniejszej dygresji, że nasz język nie zawiera operatora $\Box$. W dalszym ciągu zbiór X, który zawiera w, oznaczamy jako X_w.

Silny subintuicjonistyczny **GT**-model (**ssGT**-model) definiujemy jako trójkę $\langle W_\mu, \mu, V_\mu \rangle$, w której $\langle W, \mu \rangle$ to *sGTS* , zaś V_μ to funkcja z PV w $P(W)$. Wymuszanie implikacji odbywa się tak:

$w \Vdash_\mu \varphi \to \psi \Leftrightarrow$ istnieje taki $X_w \in \mu$, że dla każdego $v \in X$ mamy $v \nVdash \varphi$ lub $v \Vdash \psi$.

Na razie nie mamy aksjomatyzacji logiki wyznaczanej przez te struktury. Mamy natomiast pewne poszlaki. Niewątpliwie to system subintuicjonistyczny. Z jednej strony, zawiera on (tj. są prawdziwe w każdej takiej strukturze) wszystkie reguły i aksjomaty systemu $\mathsf{WF_N}$, badanego przez de Jongha i Maleki w [64]. $\mathsf{WF_N}$ to system dużo słabszy niż F, zaprezentowany przez Corsi w [27]. Z drugiej strony, są tu prawdziwe także pewne aksjomaty, które wykraczają poza F. Przypomina to sytuację modalną, kiedy to mieliśmy kilka "słabych" aksjomatów (jak *M* , *T* , *N*) i jeden "dość silny", mianowicie *4* .

Poniżej prezentujemy pakiet, który został przez nas sprawdzony w odniesieniu do klasy wszystkich **ssGT**-modeli. Prawdziwość rozumiemy standardowo, tj. oczekujemy, że formuła będzie zaakceptowana w każdym świecie każdego modelu. Niektórzy autorzy (np. [115]) używali *ukorzenionych* (*rooted*) modeli relacyjnych w kontekście subintuicjonizmu i prawdziwość oznaczała dla nich, że dana formuła jest spełniona w korzeniu (świecie bazowym).

Aksjomaty: Z systemu $\mathsf{WF_N}$:
1) $\varphi \to \varphi$, 2) $\varphi \wedge \psi \to \psi$, 3) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, 4) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$, 5) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$,
6) $\varphi \wedge (\gamma \vee \psi) \to (\varphi \wedge \gamma) \vee (\varphi \wedge \psi)$, 7) $\bot \to \varphi$
Inne (spoza F):
8) $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$, 9) $(\varphi \to \psi) \to (\gamma \to (\varphi \to \psi))$, 10) $\neg\neg\varphi$
Reguły:
11) $\varphi \to \psi, \psi \to \gamma \vdash \varphi \to \gamma$, 12) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$, 13) $\varphi \vdash \psi \to \varphi$,
14) $\varphi \to \psi, \psi \to \gamma \vdash \varphi \to \gamma$, 15) $(\varphi \to \psi) \wedge (\gamma \to \psi) \vdash (\varphi \vee \gamma) \to \psi$,
16) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$, 17) $\varphi \leftrightarrow \psi, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash (\varphi \to \alpha) \leftrightarrow (\psi \to \beta)$
18) $\gamma \to \alpha \vee \delta, \alpha \wedge \gamma \wedge \beta \to \delta \vdash (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)$ [reguła charakterystyczna dla $\mathsf{WF_N}$].

Pewne reguły nie dadzą się zaakceptować jako formuły (twierdzenia). Na przykład aksjomat $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \gamma) \to (\varphi \to \gamma)$ można obalić w takim modelu: $W = \{v, u, s\}, \mu = \{\emptyset, A = \{v, u\}, B = \{v, s\}, \{u, v, s\}\}, V(\varphi) = \{u, s\}, V(\psi) = \{u\}, V(\gamma) = \emptyset$. Teraz $v \Vdash \varphi \to \psi$, bo istnieje $A \in \mu_v$, w którym $v \nVdash \varphi, u \Vdash \psi$. Co więcej, $v \Vdash \psi \to \gamma$, gdyż mamy $B \in \mu_v$, w którym $v \nVdash \psi, s \nVdash \psi$. Z drugiej strony, $v \nVdash \varphi \to \gamma$. Istotnie, dla każdego $X \in \mu_v$ znajdziemy przynajmniej jeden świat, który spełnia φ, ale odrzuca γ (w $A : u$, w $B : s$).

Kontr-przykłady dla innych aksjomatów:

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$. Weźmy $W = \{w, u\}, \mu = \{\emptyset, W\}, V(\varphi) = \{v\}, V(\psi) = \{w\}$.
(2) $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \gamma) \to (\varphi \to \psi \wedge \gamma)$. Weźmy $W = \{v, u, s\}, \mu = \{\emptyset, \{v, u\}, \{v, s\}, W\}$, $V(\varphi) = \{s, u\}, V(\psi) = \{u\}, V(\gamma) = \{s\}$.
(3) $(\varphi \to \psi) \wedge (\gamma \to \psi) \to (\varphi \vee \gamma \to \psi)$. Weźmy $W = \{v, u, s\}, \mu = \{\emptyset, \{v, u\}, \{v, s\}, W\}$, $V(\varphi) = \{s\}, V(\gamma) = \{u\}, V(\psi) = \emptyset$.

Odrębnym zagadnieniem lub nawet wyzwaniem byłaby budowa (a ściślej aksjomatyzacja, i to pełna względem jakichś klas modeli) subintuicjonistycznych systemów wyposażonych w modalności.

4.4. **Struktury uogólnione z funkcją pomocniczą.** Brak domknięcia topologii Császára na skończone przekroje w istocie nie był większym problemem, jeśli chodzi o znalezienie odpowiadających im semantyk otoczeniowych. Tym samym jasna stała się też aksjomatyzacja logik wyznaczanych przez klasę uogólnionych topologii silnych (**MNT4**). Warto jednak przeanalizować przypadek, w którym zbiór $W \setminus \bigcup \mu$ jest niepusty, a punktom z tego zbioru przypisane są pewne rodziny otoczeń. W tym celu wrócimy do $\mathcal{F}$-struktur zaprezentowanych w poprzednim rozdziale.

Formalna definicja modeli opartych o te struktury wygląda następująco:

Definicja 4.31. Definiujemy $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-model jako czwórkę $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}, V_\mu \rangle$ taką, że trójka $\langle W_\mu, \mu, \mathcal{F} \rangle$ jest $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą, zaś V_μ to funkcja z PV w $\mathcal{P}(W)$ (wartościowanie zmiennych zdaniowych).

Wymuszanie w poszczególnych światach formuł zbudowanych wyłącznie w oparciu o spójniki boolowskie jest standardowe, zaś przypadek modalny prezentujemy poniżej:

Definicja 4.32. W każdym $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-modelu $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}, V_\mu \rangle$, dla każdego świata $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
$w \Vdash_\mu \Box\varphi \Leftrightarrow$ istnieje $G_w \in \mathcal{F}_w$ taki że dla każdego $v \in G_w, v \Vdash \varphi$.

Ponieważ będziemy, podobnie jak i wcześniej, zmierzać do równoważnej semantyki otoczeniowej, to już teraz wprowadzimy w naszym *frameworku* odpowiednie pojęcie:

Definicja 4.33. Jeżeli $\langle W_\mu, \mu, \mathcal{F} \rangle$ to $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktura, wtedy dla każdego $w \in W_\mu$ definiujemy jego rodzinę uogólnionych otoczeń w sposób następujący:
$\mathcal{N}^\mu_w = \{X \subseteq \bigcup \mu;$ że istnieje $G_w \in \mathcal{F}_w$ taki że $G_w \subseteq X\}$.

Tak pojęte otoczenia nie są koniecznie otwarte, ale warto odnotować, iż zawsze zawierają się w $\bigcup \mu$.

Możemy teraz przywołać znane już z poprzedniego rozdziału pojęcie $\mathcal{F}$-wnętrza, a to w kontekście poniższego lematu:

Lemat 4.34. *W każdym* $\mathbf{GT}$*-modelu* $M = \langle W, \mu, V_\mu \rangle$*, dla każdego* $w \in W$ *i dla każdej formuły* φ *zachodzi:* $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow w \in \mathcal{F}Int(V(\varphi))$.

Zależność można określić jako spodziewaną i analogiczną do tej, która cechuje $Int(V(\varphi))$ w $\mathbf{GT}$-modelach, aczkolwiek trzeba pamiętać o wyraźnie słabszych cechach $\mathcal{F}$-wnętrza.

4.4.1. *Odpowiednie struktury otoczeniowe.* Przedstawimy teraz struktury otoczeniowe, które są punktowo równoważne wprowadzonym wyżej $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturom.

Definicja 4.35. Definiujemy $\mathbf{GTn}$-model jako trójkę $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$, gdzie V to funkcja z PV w $P(W)$, zaś $\mathcal{N}$ jest funkcją z W w $P(P(W))$ taką że:

(1) $\bigcup \mathcal{N}$ to suma wszystkich takich zbiorów $X \subseteq W$, dla których istnieje $w \in W$ taki że $X \in \mathcal{N}_w$. [Innymi słowy, $\bigcup \mathcal{N}$ to suma *wszystkich* otoczeń].
(2) $W = W_1 \cup W_2$, gdzie $W_1 = \{z \in W; z \in \bigcap \mathcal{N}_z\}$ oraz $W_2 = \{z \in W; z \notin \bigcup \mathcal{N}\}$.
(3) $X \in \mathcal{N}_w$ oraz $X \subseteq Y \subseteq \bigcup \mathcal{N} \Rightarrow Y \in \mathcal{N}_w$.
(4) $X \in \mathcal{N}_w \Rightarrow \{z \in W_1; X \in \mathcal{N}_z\} \in \mathcal{N}_w$.

Mamy tu dwa rodzaje światów. Te, które są w *pewnym* otoczeniu, są zarazem w *każdym ze swoich* otoczeń. To zbiór W_1. Zbiór W_2 gromadzi światy, które mogą mieć pewne otoczenia, ale same nie należą do *żadnego*. Warunek (4) jest podobny do warunku charakteryzującego modalny aksjomat *4* , ale po zrelatywizowaniu go jedynie do W_1.

Jeśli chodzi o wymuszanie formuł złożonych, to - podobnie jak w poprzednich systemach - przypadki boolowskie są standardowe. Modalny wygląda tak:

Definicja 4.36. W każdym **GTn**-modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$, dla każdego świata $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow$ istnieje $X \in \mathcal{N}_w$ taki że $X \subseteq V(\varphi)$.

Występuje tu subtelna różnica w porównaniu z **sGTn**-modelami. Tam zakładaliśmy, że zbiór $V(\varphi)$ powinien być jednym z otoczeń świata. Teraz oczekujemy, że przynajmniej jedno z naszych otoczeń będzie zawarte w $V(\varphi)$. Tam, gdzie funkcja otoczeniowa jest monotoniczna ze względu na zawieranie (tj. tam, gdzie zachowany jest warunku nadzbioru), tam te definicje są równoważne. W przypadku **sGT**-modelu nie mamy jednak pełnego warunku nadzbioru: został on ograniczony do $\bigcup \mathcal{N}$.

4.4.2. *Transformacje pomiędzy semantykami.* W naszej strukturze otoczeniowej wprowadzimy teraz uogólnioną topologię. Proponujemy poniższą definicję:

Lemat 4.37. *Niech $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ będzie* **GTn** *-modelem. Wtedy zbiór $\mu = \{X \subseteq \bigcup \mathcal{N}; w \in X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w\}$ jest uogólnioną topologią na W. Równoważnie, μ jest silną uogólnioną topologią na $\bigcup \mathcal{N}$.*

Dowód powyższego lematu jest prosty: wystarczy pamiętać, że zbiory otwarte definiujemy jako zawarte w $\bigcup \mathcal{N}$. Z kolei następny lemat jest kluczowy dla naszych rozważań:

Lemat 4.38. *Niech $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ będzie* **GTn** *-modelem, zaś $\mu = \{X \subseteq \bigcup \mathcal{N}; w \in X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w\}$ uogólnioną topologią. Wówczas $\bigcup \mu = \bigcup \mathcal{N}$.*

Dowód. ($\subseteq$) Jeśli $w \in \bigcup \mu$, to istnieje taki $Y \in \mu$, że $w \in Y$. Wtedy z samej definicji μ, $Y \subseteq \bigcup \mathcal{N}$.

($\supseteq$) Załóżmy, że $w \in \bigcup \mathcal{N}$. Wtedy $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$. Weźmy dowolny $X \in \mathcal{N}_w$. Wówczas $X \subseteq \bigcup \mathcal{N}$ oraz $w \in X$, zatem X jest μ-otwarty. Zatem $w \in \bigcup \mu$. □

Przejdźmy do samej transformacji:

Twierdzenie 4.39. *Niech $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ będzie* **GTn** *-modelem. Wówczas istnieje punktowo równoważny* **GT**$\mathcal{F}$ *-model $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}, V_\mu \rangle$.*

Dowód. Niech $W_\mu = W, V_\mu = V$ i dla każdego $w \in W$, $W \supseteq X \in \mathcal{F}_w \Leftrightarrow X \in \mathcal{N}_w$. Określamy μ jak w Lemacie 4.37. Wtedy $\bigcup \mu = \bigcup \mathcal{N}_w$. Zatem $\mathcal{F}$ to faktycznie funkcja z W_μ w $P(P(\bigcup \mu))$.

Załóżmy teraz, że $w \in \bigcup \mu$ oraz $X \in \mathcal{F}_w$. Zatem $X \in \mathcal{N}_w$, $w \in X$ i w ten sposób $X \in \mu$. Z drugiej strony, jeśli $w \in X$ oraz $X \in \mu$, to $X \in \mathcal{N}_w = \mathcal{F}_w$. Weźmy teraz $w \in W \setminus \bigcup \mu = W \setminus \bigcup \mathcal{N}$ i załóżmy, że $X \in \mathcal{F}_w = \mathcal{N}_w$. Wówczas oczywiście $X \subseteq \bigcup \mu$, a meta-implikacja "$w \in X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w$" staje się trywialnie prawdziwa. W ten sposób sprawdziliśmy wszystkie oczekiwane własności $\mathcal{F}$.

Zdefiniujmy teraz $\mathcal{N}^\mu_w$ dla każdego $w \in W$ tak jak w Def. 4.33. Wtedy $\mathcal{N}^\mu_w = \mathcal{N}_w$.

($\subseteq$) Załóżmy, że $X \in \mathcal{N}^\mu_w$. Wtedy $X \subseteq \bigcup \mu$. Zatem $X \subseteq \bigcup \mathcal{N}$. Co więcej, istnieje taki $G_w \in \mathcal{F}_w$, że $G_w \subseteq X$. Stąd $G_w \in \mathcal{N}_w$. Ale wtedy, z uwagi na warunek 3 z Def. 4.35, $X \in \mathcal{N}_w$.

($\supseteq$) Załóżmy, że $X \in \mathcal{N}_w$. Wtedy $X \subseteq \bigcup \mathcal{N} = \bigcup \mu$. Rozważmy teraz $G_w = \{v \in \bigcup \mathcal{N}; X \in \mathcal{N}_v\}$. Z uwagi na warunek 4 z Def. 4.35, $G_w \in \mathcal{N}_w$, zatem $G_w \in \mathcal{F}_w$. Jeśli

$z \in G_w$ (z czego w szczególności wynika, iż $z \in \bigcup \mathcal{N}$), to $z \in \bigcap \mathcal{N}_z \subseteq X$. Tak więc $G_w \subseteq X$.

Przejdźmy do punktowej równoważności. Zajmiemy się tylko przypadkiem modalnym. Przyjmijmy, że $w \Vdash \Box\varphi$. Istnieje zatem taki $X \in \mathcal{N}_w$, że dla każdego $v \in X, v \Vdash \varphi$. Z wcześniejszych rozważań $X \in \mathcal{N}^\mu_w$, istnieje więc otwarty $G_w \in \mathcal{F}_w$ taki że $G_w \subseteq X \subseteq V(\varphi) = V_\mu(\varphi)$. Zatem $w \Vdash_\mu \Box\varphi$.

Teraz przyjmijmy, że $w \Vdash_\mu \Box\varphi$. Zatem istnieje taki $G_w \in \mathcal{F}_w$, że $G_w \subseteq V_\mu(\varphi) = V(\varphi)$ (ostatnia równość wynika z założenia indukcyjnego). Rzecz jasna G_w należy do $\mathcal{N}^\mu_w$, zatem jest również w $\mathcal{N}_w$. Stąd $w \Vdash \Box\varphi$. □

Drugie twierdzenie mówi o transformacji w drugą stronę:

Twierdzenie 4.40. *Niech $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}, V_\mu \rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$*-modelem. Istnieje wtedy punktowo równoważny* **GTn***-model $M = \langle W, \mathcal{N}^\mu, V \rangle$.*

Dowód. Podobnie jak wcześniej, przyjmujemy, że $W = W_\mu$ oraz $V_\mu = V$. W naszym środowisku topologicznym musimy zdefiniować otoczenia w sensie **GTn**-struktur. Przyjmujemy w tym celu Def. 4.33). Musimy teraz sprawdzić, że $\mathcal{N}^\mu$ spełnia wszystkie oczekiwane własności.

Wpierw pokazujemy, że $\bigcup \mu = \bigcup \mathcal{N}^\mu$.

($\subseteq$): Jeśli $w \in \bigcup \mu$, to istnieje $G_w \in \mu$ taki że $w \in G_w$. W szczególności, $G_w \in \mathcal{F}_w$. Zatem (na mocy Def. 4.33), $G_w \in \mathcal{N}^\mu_w$.

($\supseteq$): Niech $w \in \bigcup \mathcal{N}^\mu$. Istnieją więc $v \in W$, $X \in \mathcal{N}^\mu_v$ takie że $w \in X$. Z definicji, $X \subseteq \bigcup \mu$.

Niech teraz $w \in W, X \in \mathcal{N}^\mu_w$ oraz $X \subseteq Y \subseteq \bigcup \mathcal{N}^\mu$. Istnieje zatem $G_w \in \mathcal{F}_w$ taki że $G_w \subseteq X \subseteq \bigcup \mu$. Zarazem jednak $Y \subseteq \bigcup \mu$ oraz oczywiście $G_w \subseteq Y$. Stąd $Y \in \mathcal{N}^\mu_w$.

Załóżmy, że $X \in \mathcal{N}^\mu_w$ i rozważmy $S = \{z \in W_1; X \in \mathcal{N}^\mu_z\}$. Istnieje taki $G_w \in \mathcal{F}_w$, że $G_w \subseteq X \subseteq \bigcup \mu$. Ale $S \subseteq X$: weźmy $v \in S$; wtedy z faktu, że $v \in \bigcap \mathcal{N}^\mu_v$, wnosimy, iż $v \in X$. Co więcej, S zawiera tylko (niektóre) światy z W_1, zatem $S \subseteq \bigcup \mu$.

Przejdźmy do punktowej równoważności. Niech $w \Vdash_\mu \Box\varphi$. Mamy zatem taki $G_w \in \mathcal{F}_w$, że $G_w \subseteq V_\mu(\varphi) = V(\varphi)$ (ostatnia równość zachodzi na mocy założenia indukcyjnego). Wtedy $G_w \in \mathcal{N}^\mu_w$. Zatem $w \Vdash \Box\varphi$.

Załóżmy teraz, że $w \Vdash \Box\varphi$. Istnieje więc $X \in \mathcal{N}^\mu_w$ taki że $X \subseteq V(\varphi) = V_\mu(\varphi)$. Musi zatem istnieć $G_w \in \mathcal{F}_w$ dla którego $G_w \subseteq X \subseteq V_\mu(\varphi)$. Wtedy $w \Vdash_\mu \Box\varphi$. □

4.5. **Uogólnione topo-bisymulacje.**

4.5.1. *Pojęcia bisymulacji.* W niniejszym podrozdziale wracamy do **GT**$\mathcal{F}$-modeli i wprowadzamy trzy rodzaje bisymulacji pomiędzy dwoma takimi obiektami. Pierwsze dwa są dość typowe, trzeci natomiast wymaga (do właściwego działania) zmiany definicji operatora modalnego.

Definicja 4.41. Załóżmy, że $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ oraz $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau, V_\tau \rangle$ to dwa **GT**$\mathcal{F}$-modele. Definiujemy uogólnioną 0-topo-bisymulację jako niepustą relację $T \subseteq W_\mu \times W_\tau$ taką, że jeśli wTw' (gdzie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$), to:

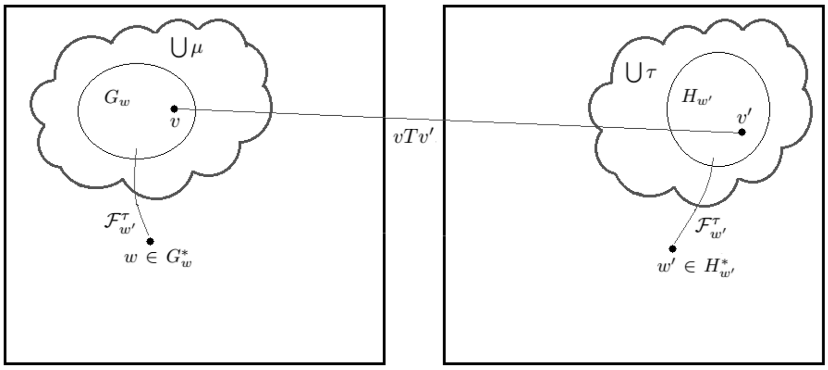
(1) $w \Vdash_\mu q \Leftrightarrow w' \Vdash_\tau q$ dla każdego $q \in PV$.
(2) Jeśli $w \in G_w \in \mu$, to istnieje $H_{w'} \in \tau$ taki, że dla każdego $v' \in H_{w'}$ znajdziemy taki $v \in G_w$, dla którego vTv'.
(3) Jeśli $w' \in H_{w'} \in \tau$, to istnieje $G_w \in \mu$ taki, że dla każdego $v \in G_w$ znajdziemy taki $v' \in H_{w'}$, dla którego vTv'.

Tak określona funkcja z natury rzeczy użyteczna jest głównie dla punktów należących do $\bigcup \mu$. Wprowadzamy zatem pewną generalizację:[33]

[33]Przypomnijmy dla porządku, że w ogólności $A^* = \{z \in W; A \in \mathcal{F}_z\}$.

Definicja 4.42. Załóżmy, że $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ oraz $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\mu, V_\tau \rangle$ to dwa **GT**$\mathcal{F}$-modele. Definiujemy uogólnioną 1-topo-bisymulację jako niepustą relację $T \subseteq W_\mu \times W_\tau$ taką, że jeśli wTw' (gdzie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$), to:

(1) $w \Vdash_\mu q \Leftrightarrow w' \Vdash_\tau q$ dla każdego $q \in PV$.
(2) Jeśli $w \in G_w^*$, gdzie $G_w \in \mu$, to istnieje $H_{w'} \in \mathcal{F}_{w'}^\tau$ taki, że dla każdego $v' \in H_{w'}$ znajdziemy $v \in G_w$ dla którego vTv'.
(3) Jeśli $w' \in H_{w'}^*$, gdzie $H_{w'} \in \tau$, to istnieje $G_w \in \mathcal{F}_w^\mu$ taki, że dla każdego $v \in G_w$ znajdziemy $v' \in H_{w'}$ dla którego vTv'.

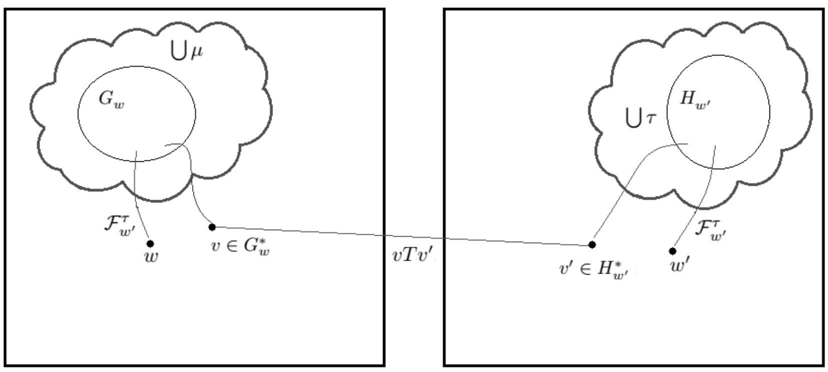


Rysunek 14. Idea 1-bisymulacji (zilustrowano podpunkt 2) z definicji).

Trzecie pojęcie jest nieco odmienne.

Definicja 4.43. Załóżmy, że $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ oraz $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\mu, V_\tau \rangle$ są dwoma **GT**$\mathcal{F}$-modelami. Definiujemy uogólnioną 2-topo-bisimulację jako niepustą relację $T \subseteq W_\mu \times W_\tau$ taką, że jeśli wTw' (gdzie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$), to:

(1) $w \Vdash_\mu q \Leftrightarrow w' \Vdash_\tau q$ dla każdego $q \in PV$.
(2) Jeśli $w \in G_w^*$, gdzie $G_w \in \mu$, to istnieje $H_{w'} \in \mathcal{F}_{w'}^\tau$ taki, że dla każdego $v' \in H_{w'}^*$ znajdziemy $v \in G_w^*$ dla którego vTv'.
(3) Jeśli $w' \in H_{w'}^*$, gdzie $H_{w'} \in \tau$, to istnieje $G_w \in \mathcal{F}_w^\tau$ taki, że dla każdego $v \in G_w^*$ znajdziemy $v' \in H_{w'}^*$ dla którego vTv'.



Rysunek 15. Idea 2-bisymulacji (zilustrowano podpunkt 2) z definicji).

Dwa kolejne twierdzenia gwarantują nam oczekiwany związek pomiędzy bisymulacjami typu 0 i 1 a funkcjami zdefiniowanymi powyżej.

Twierdzenie 4.44. *Niech* $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu \rangle$ *będzie* **GT**$\mathcal{F}$*-strukturą, zaś* $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau, V_\tau \rangle$ **GT**$\mathcal{F}$*-modelem. Załóżmy, że* f *jest ciągłą i otwartą funkcją z* W_μ *w* W_τ*. Dla każdej zmiennej* $q \in PV$ *ustalmy* $V_\mu(q) = f^{-1}(V_\tau(q))$*. Wtedy* f *jest* 0*-topo-bisimulacją pomiędzy* $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ *i* M_2*.*

Dowód. Niech $f(w) = w'$, gdzie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$. Załóżmy, że $w \Vdash_\mu q$, skąd $w \in V_\mu(q) = f^{-1}(V_\tau(q))$. Mamy: $f(w) = w' \in f(f^{-1}(V_\tau(q))) = V_\tau(q)$. Zatem $w' \Vdash_\tau q$.

Niech teraz $w' \Vdash_\tau q$. Zatem $w' \in V_\tau(q) = f(f^{-1}(V_\tau(q)) = f(V_\mu(q))$. Co więcej, $w \in f^{-1}(\{w'\})$. Z teorii zbiorów wiemy, że jeśli $\{w'\} \subseteq f(V_\mu(q))$ (a tak jest), to $f^{-1}(\{w'\}) \subseteq f^{-1}(f(V_\mu(q)) = V_\mu(q)$. Zatem $w \Vdash_\mu q$.

Teraz załóżmy, że $w \in G_w \in \mu$. Możemy powiedzieć, że $f(G_w) \in \tau$ (bo f jest otwarta). Jeśli $f(w) = w'$, to $w' \in f(G_w)$. Jeżeli teraz weźmiemy $v' \in f(G_w)$, to będzie istnieć taki $v \in G_w$, dla którego $f(v) = v'$.

Załóżmy wreszcie, że $w' \in H_{w'} \in \tau$. Widzimy, że $f^{-1}(H_{w'}) \in \mu$ (bo f jest ciągła). Zatem $w \in f^{-1}(\{w'\})$, więc $w \in f^{-1}(H_{w'})$. Weźmy $v \in G_w$. Możemy rzec, iż $f(G_w) = f(f^{-1}(H_{w'})) = H_{w'}$, zatem istnieje $v' \in H_{w'}$ taki że $f(v) = v'$. □

Twierdzenie 4.45. *Niech* $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu \rangle$ *będzie* **GT**$\mathcal{F}$*-strukturą, zaś* $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau, V_\tau \rangle$ *będzie* **GT**$\mathcal{F}$*-modelem. Załóżmy, że* f *jest* $\mathcal{F}$*-ciągłą i* $\mathcal{F}$*-otwartą funkcją z* W_μ *w* W_τ*. Dla każdej zmiennej* $q \in PV$ *ustalmy* $V_\mu(q) = f^{-1}(V_\tau(q))$*. Wtedy* f *jest* 1*-topo-bisymulacją między* $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ *i* M_2*.*

Dowód. Niech $f(w) = w'$, gdzie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$. Pierwsza część dowodu przebiega tak jak w Twierdzeniu 4.44.

Co do części drugiej: załóżmy, że $w \in G^*_w$, tj. $G_w \in \mathcal{F}^\mu_w$. Można powiedzieć, że $f(G_w) \in \mathcal{F}^\tau_{w'}$ (bo f jest $\mathcal{F}$-otwarta). Załóżmy, że $v' \in f(G_w)$. Wtedy istnieje pewien $v \in G_w$ taki, że $f(v) = v'$.

Podobnie w części trzeciej. Załóżmy, że $w' \in H^*_{w'}$, tj. $H_{w'} \in \mathcal{F}^\tau_{w'}$. Można powiedzieć, że $f^{-1}(H_{w'}) \in \mathcal{F}^\mu_w$ (bo f jest $\mathcal{F}$-ciągła). Załóżmy, że $v \in f^{-1}(H_{w'})$. Wtedy $f(v) \in f(f^{-1}(H_{w'})) = H_{w'}$. □

Bisymulacja daje nam pewien rodzaj "podobieństwa logicznego" pomiędzy dwoma modelami. Wyraża się on (w naszym środowisku) przez dwa poniższe twierdzenia:

Twierdzenie 4.46. *Załóżmy, że* $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ *oraz* $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\mu, V_\tau \rangle$ *będą to dwa* **GT**$\mathcal{F}$*-modele,* T *to* 0*-topo-bisymulacja pomiędzy nimi, a poza tym istnieją takie* $w \in \bigcup \mu, w' \in \bigcup \tau$*, że* wTw'*. Wtedy* w *oraz* w' *spełniają te same formuły.*

Dowód. Dowód przebiega indukcyjnie. Jeśli $\varphi := q \in PV$, to teza jest oczywista (z samej definicji bisymulacji). Przypadki spójników boolowskich pomijamy i przechodzimy do modalności. Załóżmy, że $\varphi := \Box\gamma$ oraz $w \Vdash_\mu \varphi$. Przyjęliśmy, że $w \in \bigcup \mu$, zatem istnieje $G_w \in \mu$ taki że $w \in G_w$ oraz $G_w \subseteq V_\mu(\gamma)$. Stąd istnieje taki $H_{w'} \in \tau$, że dla każdego $v' \in H_{w'}$ znajdziemy $v \in G_w$ dla którego vTv'. Oczywiście $v \Vdash_\mu \gamma$. Wtedy jednak z założenia indukcyjnego $v' \Vdash_\tau \gamma$. Wówczas $w' \Vdash_\tau \Box\gamma$.

Jeżeli zaczniemy teraz od założenia, że $w' \Vdash_\tau \Box\gamma$, to dalszy dowód będzie prowadzony podobnie. □

Następne twierdzenie dotyczy struktur *zgodnych.* Określamy tym mianem takie, w których dla każdego $w \in W$ mamy gwarancję, że $\emptyset \notin \mathcal{F}_w$.

Twierdzenie 4.47. *Załóżmy, że* $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ *oraz* $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau, V_\tau \rangle$ *to dwa zgodne* **GT**$\mathcal{F}$*-modele,* T *to* 1*-bisymulacja pomiędzy nimi, a poza tym istnieją takie* $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$*, że* wTw'*. Wtedy* w *oraz* w' *spełniają te same formuły.*

Dowód. Dowód znów przebiega indukcyjnie. Rozważmy przypadek modalny. Niech $\varphi := \Box\gamma$ oraz $w \Vdash_\mu \Box\gamma$. Istnieje zatem taki $G_w \in \mathcal{F}^\mu_w$, że $G_w \subseteq V_\mu(\gamma)$. Ze względu na 1-topo-bisymulację istnieje $H_{w'} \in \mathcal{F}^\tau_{w'}$ o oczekiwanych własnościach. Weźmy zatem $v' \in H_{w'}$ (co możemy uczynić z uwagi na zgodność modelu). Teraz możemy znaleźć taki $v \in G_w$ dla którego vTv'. Z założenia indukcyjnego $v' \Vdash_\tau \gamma$. Wtedy $w' \Vdash_\tau \Box\gamma$.

Przy wyjściu od założenia, że $w' \Vdash_\tau \Box\gamma$ rozumowanie przebiega analogicznie. $\Box$

4.5.2. 2-*bisymulacja i* **bGT$\mathcal{F}$** *-modele.* Przy pomocy 2-bisymulacji nie osiągniemy dla języka wyposażonego w $\Box$ oczekiwanego rezultatu o spełnianiu tych samych formuł przez powiązane ze sobą światy. Tym niemniej bisymulacja ta zadziała poprawnie, jeśli zredefiniujemy interpretację modalności w następujący sposób:

$$w \Vdash \bullet\varphi \Leftrightarrow \text{istnieje taki } G_w \in \mathcal{F}_w \text{ że dla każdego } v \in G^*_w,\ v \Vdash \varphi.$$

Wbrew pozorom, takie rozumienie modalności jest niewiele mniej naturalne od tego, które pierwotnie przyjęliśmy dla $\Box$. Tamta interpretacja była prostym przeniesieniem klasycznego, topologicznego rozumienia konieczności. Żądaliśmy, by istniało takie otoczenie G_w świata w, w którym każdy punkt $v \in G_w$ spełni formułę. Ale w zwykłej topologii (także w silnej uogólnionej) owo otoczenie G_w jest też otoczeniem każdego swego elementu, tzn. $G_w = G^*_w$. W **GT$\mathcal{F}$**-strukturach tak być nie musi, zatem zrozumiałe wydaje się wyróżnienie czy też "wydobycie na powierzchnię" tej szczególnej restrykcji, co wyraża właśnie $\bullet$. Otóż o ile w nie musi należeć do danego $G_w \in \mathcal{F}_w$, o tyle należy do G^*_w.

Modele oparte na **GT$\mathcal{F}$**-strukturach, ale rozpatrywane w odniesieniu do języka, w którym $\Box$ został zastąpiony przez $\bullet$, będziemy nazywać **bGT$\mathcal{F}$**-modelami. Zauważmy, że odpowiednik aksjomatu T, w nowym języku wyrażający się jako $\bullet\varphi \to \varphi$, jest zawsze prawdziwy.

Twierdzenie 4.48. *Załóżmy, że $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu\rangle$ oraz $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau, V_\tau\rangle$ są dwoma zgodnymi* **bGT$\mathcal{F}$** *-modelami, T jest 2-topo-bisymulacją pomiędzy nimi oraz istnieją takie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$ dla których wTw'. Wtedy w oraz w' spełniają te same formuły.*

Dowód. Prezentujemy tylko modalny przypadek indukcji. Załóżmy, że $\varphi := \bullet\gamma$ oraz $w \Vdash_\mu \bullet\gamma$. Istnieje zatem $G_w \in \mathcal{F}^\mu_w$ taki że $G^*_w \subseteq V_\mu(\gamma)$. Przy pomocy 2-topo-bisymulacji znajdujemy $H_{w'} \in \mathcal{F}^\tau_{w'}$ o oczekiwanych własnościach. Bierzemy teraz dowolny $v' \in H^*_{w'}$ i znajdujemy odpowiedni $v \in G^*_w$. Tak więc vTv' i dlatego spełniają (z założenia indukcyjnego) te same formuły. W szczególności $v' \Vdash_\tau \gamma$. A zatem $w' \Vdash_\tau \bullet\gamma$. Podobne rozumowanie można przeprowadzić po wyjściu z założenia, że $w' \Vdash_\tau \bullet\gamma$. $\Box$

Warto odnotować, że pewna podklasa **bGT$\mathcal{F}$**-modeli może być traktowana jako **sGT**-model. Klasa ta zdefiniowana została poniżej:

Definicja 4.49. Niech $M = \langle W, \mu, \mathcal{F}, V_\mu\rangle$ będzie **bGT$\mathcal{F}$**-modelem. Powiemy, że M jest *faktycznie silnym* (*in-fact-strong, i.f.s*) **bGT$\mathcal{F}$**-modelem $\Leftrightarrow$ dla każdego $w \in W \setminus \bigcup\mu$:

(1) Jeśli $X \in \mathcal{F}_w$ oraz $X \subseteq Y \in \mu$, to $Y \in \mathcal{F}_w$.
(2) Jeśli $\bigcup_{i\in J} X_i \in \mathcal{F}_w$, gdzie $X_i \in \mu$ dla każdego $i \in J$, to istnieje taki $k \in J$ dla którego $w \in X^*_k$ (*warunek rozbicia sumy*).
(3) $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$.

Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.50. *Dla każdego i.f.s.* **bGT**$\mathcal{F}$*-modelu istnieje punktowo równoważny* **sGT***-model (z modalnością interpretowaną jak* $\Box$*).*

Dowód. Mając uogólnioną topologię μ, musimy wprowadzić nową uogólnioną topologię τ w taki sposób, że cała przestrzeń stanie się τ-otwarta. Szukamy zatem pewnego $M' = \langle W', \tau, V_\tau \rangle$, przy czym założymy, że $W' = W$ oraz $V_\tau = V_\mu$.

Przyjmijmy, że $Y \in \tau \Leftrightarrow Y = \emptyset$ lub $Y = X^*$ dla pewnego $X \in \mu$. Sprawdźmy, że to uogólniona topologia. Po pierwsze, $\emptyset \in \tau$ (z samej definicji). Co z niepustymi sumami? Niech $J \neq \emptyset$ oraz Y_i będzie τ-otwarty dla każdego $i \in J$. Możemy założyć, że istnieje przynajmniej jeden $k \in J$ taki że $Y_k \neq \emptyset$. Rozważmy $\bigcup_{i \in J} Y_i = \bigcup_{i \in J} X_i^*$ (gdzie $X_i^* = Y_i$ oraz $X_i \in \mu$ dla każdego $i \in J$). Pokażemy, że ów zbiór jest tożsamy z $(\bigcup_{i \in J} X_i)^*$:

($\subseteq$) Niech $w \in \bigcup_{i \in J} Y_i$. Istnieją zatem $k \in J$ oraz Y_k takie że $w \in Y_k$. Zatem istnieje $X_k \in \mu$ dla którego $Y_k = X_k^*$. Tak więc $X_k \in \mathcal{F}_w$. Co więcej, $X_k \subseteq \bigcup_{i \in J} X_i$. Wszelako z własności uogólnionej topologii $\bigcup_{i \in J} X_i \in \mu$. Z warunku nadzbioru mamy $\bigcup_{i \in J} X_i \in \mathcal{F}_w$. Zatem $w \in (\bigcup_{i \in J} X_i)^*$.

($\supseteq$) Niech $w \in (\bigcup_{i \in J} X_i)^*$. Zatem $\bigcup_{i \in J} X_i \in \mathcal{F}_w$. Z warunku rozbicia sumy istnieje $k \in J$ taki że $X_k \in \mathcal{F}_w$. Tak więc $w \in X_k^* \subseteq \bigcup_{i \in J} X_i^*$.

W odniesieniu do całego uniwersum skorzystamy z faktu, że dla każdego $w \in W$, $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$. Zatem dla każdego $w \in W$ istnieje taki X_w, że $X_w \in \mathcal{F}_w$, tj. $w \in X_w^*$. Stąd $W \subseteq \bigcup_{w \in W} X_w^* = (\bigcup_{w \in W} X_w)^*$. Druga inkluzja jest trywialna. Ostatecznie W jest τ-otwarty.

Możemy przejść teraz do punktowej równoważności. Udowodnimy tylko przypadek modalny, który zapisać można tak: $w \Vdash_\mu \bullet\varphi \Leftrightarrow w \Vdash_\tau \Box\varphi$. Przyjmijmy więc, że $w \Vdash_\mu \bullet\varphi$. Istnieje zatem taki $X \in \mathcal{F}_w$, że dla każdego $v \in X^*$, $v \Vdash_\mu \varphi$. Z założenia indukcyjnego $v \Vdash_\tau \varphi$. Ale $X^* \in \tau$, tak więc istnieje pewien $Z \in \tau$ (mianowicie $Z = X^*$), że $w \in Z$ oraz dla każdego $v \in Z$, $v \Vdash_\tau \varphi$. Stąd $w \Vdash_\tau \Box\varphi$.

Przypuśćmy teraz, że $w \Vdash_\tau \Box\varphi$. Istnieje zatem $Z \in \tau$ taki że $w \in Z$ i dla każdego $v \in Z$, $v \Vdash_\tau \varphi$. Z założenia indukcyjnego, $v \Vdash_\mu \varphi$. Musi być jednak taki $X \in \mu$ dla którego $Z = X^*$. Zatem $w \in X^*$, tj. $X \in \mathcal{F}_w$. Stąd $w \Vdash_\mu \bullet\varphi$.

$\Box$

Następne twierdzenie jest prostsze w dowodzeniu:

Twierdzenie 4.51. *Niech* $M' = \langle W', \tau, V_\tau \rangle$ *będzie* **sGT***-modelem. Istnieje wtedy punktowo równoważny i.f.s.* **bGT**$\mathcal{F}$*-model* $M = \langle W, \mu, \mathcal{F}, V_\mu \rangle$.

Dowód. (szkic) Łatwo sprawdzić, że każdy **sGT**-model jest w szczególności i.f.s. **bGT**$\mathcal{F}$-modelem. Musimy po prostu utożsamić $\mathcal{F}_w$ z rodziną wszystkich zbiorów otwartych zawierających w (dla każdego $w \in W$). To, że zachodzi warunek nadzbioru, jest jasne. Oczywiście $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$. Co się tyczy warunku rozbicia sumy, to możemy wziąć dowolny $k \in J$, gdyż w jest w każdym ze swych otoczeń otwartych. Zauważmy, że w **sGT**-strukturze $X = X^*$ dla każdego $X \subseteq \bigcup \tau = W$. $\Box$

Nasuwa się pytanie o to, czego powinniśmy żądać od funkcji $\mathcal{F}$-ciągłych i $\mathcal{F}$-otwartych, by wyznaczały one 2-bisymulacje. Niestety, rezultaty w tym zakresie jawią się jako mniej intuicyjne niż w przypadku 0- i 1-bisymulacji. Należy wprowadzić dodatkowe założenia na temat funkcji, a w dodatku ograniczyć nasze rozważania do pewnej podklasy struktur. Tym niemniej przedstawiamy poniżej odpowiednie definicje i twierdzenia.

Definicja 4.52. Powiemy, że **GT**$\mathcal{F}$-struktura $F = \langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ jest *-**GT**$\mathcal{F}$-strukturą, jeżeli istnieje przynajmniej jeden niepusty $A \in \mu$ dla którego $A = A^*$.

W ogólności bowiem może być tak, że *każdy* zbiór otwarty jest otoczeniem nie tylko dla swoich elementów, ale też i dla pewnych światów z $W \setminus \bigcup \tau$. Wtedy nie byłoby takiego zbioru $A \in \mu$, że $A = A^*$.

Definicja 4.53. Niech $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu \rangle$ oraz $F_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau \rangle$ będą dwiema **GT**$\mathcal{F}$-strukturami, zaś f funkcją z W_μ w W_τ. Powiemy, że f ma:

- *-własność $\Leftrightarrow [f(G) \in \tau \Rightarrow f(G) = f(G)^*]$
- $^{*-1}$-własność $\Leftrightarrow \left[G' \in \tau \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(G')^*\right]$

Meta-implikacje w powyższej definicji można zastąpić meta-równoważnościami, bo i tak pojęcie A^* dotyczy tylko zbiorów otwartych.

Dysponując powyższymi pojęciami, możemy sformułować:

Twierdzenie 4.54. *Niech $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu \rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$*-strukturą, zaś $M_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau, V_\tau \rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$*-modelem. Załóżmy, że $f : W_\mu \to W_\tau$ jest funkcją $\mathcal{F}$-ciągłą, $\mathcal{F}$-otwartą oraz posiadającą *- i $^{*-1}$-własności. Dla każdej zmiennej $q \in PV$ ustalmy $V_\mu(q) = f^{-1}(V_\tau(q))$. Wtedy f jest 2-topo-bisymulacją między $M_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu, V_\mu \rangle$ i M_2.*

Dowód. Niech $f(w) = w'$, gdzie $w \in W_\mu, w' \in W_\tau$. Znów możemy, w odniesieniu do pierwszej cechy bisymulacji, powtórzyć rozumowanie z Twierdzenia 4.44.

Co do drugiej cechy: przyjmijmy, że $w \in G_w^*$ (tj. $G_w \in \mathcal{F}_w$). Z $\mathcal{F}$-otwartości wnosimy, że $f(G_w) \in \mathcal{F}_{w'}^\tau$. W szczególności zatem $f(G_w) \in \tau$, ale w takim razie (z *-własności funkcji f) $f(G_w) = f(G_w)^*$, zatem jeśli weźmiemy dowolny $v' \in f(G_w)^*$, to $v' \in f(G_w)$. Ale $G_w \subseteq G_w^*$, zatem mamy $f(G_w) \subseteq f(G_w^*)$. Tak więc $v' \in f(G_w^*)$, czyli istnieje pewien $v \in G_w^*$ taki że $f(v) = v'$.

Podobnie przebiega dowód trzeciej cechy (tym razem skorzystamy z $\mathcal{F}$-ciągłości oraz $^{*-1}$-własności. $\square$

Przy okazji widzimy, że jeżeli pomiędzy dwiema **GT**$\mathcal{F}$-strukturami istnieje funkcja o opisanych w twierdzeniu własnościach, to owe przestrzenie są *-**GT**$\mathcal{F}$-strukturami.

4.6. **Reguły i aksjomaty.**

4.6.1. *Częściowe rezultaty.* Niestety, nie posiadamy pełnej aksjomatyzacji logiki wyznaczanej przez całą klasę **GT**$\mathcal{F}$-struktur. W istocie nie wiemy, czy system ten jest skończenie aksjomatyzowalny. Wydaje się, że przy budowie modelu kanonicznego (a zakładamy roboczo skorzystanie z tej właśnie, standardowej techniki) pojawiłby się następujący problem: w jaki sposób wyróżnić w takim modelu funkcję $\mathcal{F}$, biorąc pod uwagę, że pracowalibyśmy już z teoriami (maksymalnymi)?

Możemy jednak przedstawić pewne rezultaty częściowe, które zebraliśmy w poniższym lemacie.

Lemat 4.55. *W każdym* **GT**$\mathcal{F}$*-modelu $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}, V_\mu \rangle$ zachodzą następujące fakty:*

(1) Prawdziwe są aksjomaty M i 4. Istnieją natomiast modele, w których nie jest prawdziwy T.
(2) Jeśli $w \Vdash_\mu \varphi$ dla każdego $w \in \bigcup \mu$, zaś $v \in W \setminus \bigcup \mu$ oraz $\emptyset \notin \mathcal{F}_v$, wtedy $v \Vdash_\mu \Diamond\varphi$, gdzie $\Diamond\varphi$ jest skrótem dla $\neg\Box\neg\varphi$.
(3) Jeśli $w \Vdash_\mu \varphi$ dla każdego $w \in \bigcup \mu$, zaś $v \in W \setminus \bigcup \mu$ oraz $\mathcal{F}_v \neq \emptyset$, wtedy $v \Vdash_\mu \Box\varphi$.
(4) Jeśli $v \in W \setminus \bigcup \mu, w \in \bigcup \mu$ oraz $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_w$, to $v \Vdash_\mu \varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$ dla każdej φ z zbioru MOD, który budujemy następująco: ***i)*** *dla każdej formuły γ, $\Box\gamma \in MOD$,* ***ii)*** *$\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \to \beta$ należą do MOD, o ile α, β są już w MOD.*

Dowód.

(1) Sprawdzenie prawdziwości *M* i *4* nie powinno przedstawiać problemu. Łatwo jest też zbudować taki kontrmodel, w którym przynajmniej jeden świat z $W \setminus \bigcup \mu$ będzie spełniał $\Box\varphi$, ale nie φ. Na przykład: $W = \{w, v\}, \mu = \{\emptyset, \{w\}\}, V(\varphi) = \{w\}, \mathcal{F}_v = \{w\}$.
(2) Przy przyjętych założeniach: jeśli $v \nVdash_\mu \Diamond\neg\Box\neg\varphi$, to $v \Vdash_\mu \Box\neg\varphi$, tj. istnieje taki $G_v \in \mathcal{F}_v$, że dla każdego $u \in G_v$, $u \Vdash_\mu \neg\varphi$, tj. $u \nVdash_\mu \varphi$. Mogłoby to być trywialnie prawdziwe, gdyby $\emptyset$ należał do $\mathcal{F}_v$, ale to wykluczyliśmy. Zatem każdy zbiór z $\mathcal{F}_v$ jest niepusty i zarazem zawarty w $\bigcup \mu$, a co za tym idzie - w $V(\varphi)$. Sprzeczność.
(3) Jeśli założyliśmy, że $\mathcal{F}_v \neq \emptyset$ i nie wprost przyjmiemy, że w każdym zbiorze z $\mathcal{F}_v$ istnieje świat falsyfikujący φ, to otrzymamy sprzeczność z założeniem, że $\bigcup \mu \Vdash_\mu \varphi$.
(4) Dowód przebiega przez prostą indukcję po złożoności budowy formuły.

$\Box$

Oczywiście mamy dwa przypadki szczególne. Klasa struktur, w których $\bigcup \mu = W$ i $W \setminus \bigcup \mu = \emptyset$ to znana nam już klasa struktur silnych. W tym wypadku zachodzi pełność względem logiki **MNT4**. Z kolei klasa struktur, w których $\mathcal{F}_w = \emptyset$ dla każdego $w \in W \setminus \bigcup \mu$, odpowiada logice **MT4** (zob. [62]). Tutaj możemy światy z $W \setminus \bigcup \mu$ postrzegać jako tzw. światy niemożliwe (*impossible worlds*), tj. takie, w których "nic nie jest konieczne, a wszystko jest możliwe" (tj. $\Diamond\varphi$ zachodzi w takim świecie dla każdej φ, zaś $\Box\varphi$ dla żadnej φ nie zachodzi). Więcej na temat takich światów czytelnik znajdzie np. w [104].

W [62] autorzy pokazali, że logika **MT4** może zostać zanurzona w tzw. Informacyjną Logikę Połączeń Galois (*Informational Logic of Galois Connections*), w skrócie **ILGC**. W ten sposób uzyskuje się pewien związek między nie-normalnymi logikami modalnymi a teorią zbiorów przybliżonych Pawlaka.

Udało się jednak opracować jeszcze inną klasę struktur z topologią Császára, dla której znaleźliśmy aksjomatyzację. Rozwiązanie to zostanie zaprezentowane w następnym podrozdziale. Stanowi pewien krok naprzód w naszych dociekaniach, jakkolwiek ma swoją cenę, jaką jest większy stopień skomplikowania modelu.

4.6.2. *Aksjomatyzacja i* **GTf** *-struktury.* Nasze rozważania zaczniemy od zauważenia, że środowisko **GT**$\mathcal{F}$-struktur w dość naturalny sposób sugeruje nam wprowadzenie nie jednej, a dwóch modalności, będących pewnymi wariantami *konieczności*:

$$w \Vdash_\mu \Box\varphi \Leftrightarrow \text{ istnieje taki } X \in \mu, \text{ że } w \in X \text{ oraz dla każdego } v \in X, v \Vdash \varphi.$$
$$w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi \Leftrightarrow \text{ istnieje taki } X \in \mathcal{F}_w, \text{ że dla każdego } v \in X, v \Vdash \varphi.$$

Operator $\Box$ działa tak, jak konieczność w modelu ze światami niemożliwymi. To znaczy, że jeśli $w \in W \setminus \bigcup \mu$, to dla dowolnej formuły φ zawsze będziemy mieć $w \nVdash_\mu \Box\varphi$ (albowiem nie ma takiego $X \in \mu$, do którego nasz w mógłby należeć). Nie można natomiast wykluczyć sytuacji, w której istnieją takie $w \in W \setminus \bigcup \mu$ oraz takie formuły φ, dla których $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$.

Zarazem jest i tak, że jeśli $w \in \bigcup \mu$ oraz $w \Vdash_\mu \Box\varphi$, to $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$ (odwrotna zależność też zachodzi, zatem z punktu widzenia światów z $\bigcup \mu$ obie modalności są nierozróżnialne). W istocie $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$ jest formułą prawdziwą w dowolnym **GT**$\mathcal{F}$-modelu, w którym mamy obie wspomniane wyżej modalności. Warto odnotować, że prawdziwa jest również formuła $\blacksquare\varphi \to \blacksquare\Box\varphi$. Wynika to z faktu, że jeśli mamy $X \in \mathcal{F}_w$ taki, iż $v \Vdash_\mu \varphi$ dla każdego $v \in X$, to w rzeczywistości (ponieważ $v \in \bigcup \mu$, zatem X jest otoczeniem v) mamy też $v \Vdash_\mu \Box\varphi$.

Nie udało się nam jednak, mimo usilnych prób, wypracować sensownej koncepcji modelu kanonicznego dla **GT**$\mathcal{F}$-struktur wyposażonych w te dwie modalności.

Głównym problemem, ujmując rzecz skrótowo, było takie zdefiniowanie aksjomatyki, a następnie topologii μ oraz funkcji $\mathcal{F}$, by dla dowolnej teorii maksymalnej w należącej do $W \setminus \bigcup \mu$ zachodziła oczekiwana współzależność: $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi \Leftrightarrow \blacksquare\varphi \in w$. Ograniczymy jednak część naszych oczekiwań, w zamian za to zwiększając inne - i przedstawimy kompromisowy projekt.

Bazuje on na następującym przeświadczeniu: iż dość naturalną formą uporządkowania **GT**$\mathcal{F}$-struktury (z natury rzeczy będącej tworem bardzo ogólnym, ponieważ prawie nic nie zakłada się na temat funkcji $\mathcal{F}$, poza tym oczywiście, że każdemu punktowi spoza topologii przypisuje ona pewną rodzinę zbiorów otwartych) byłoby przyjęcie, że każdy świat z $W \setminus \bigcup \mu$ dziedziczy rodzinę otwartych otoczeń po pewnym świecie z $\bigcup \mu$. Innymi słowy, że rodzina $\mathcal{F}_w$ jest tożsama z rodziną $\mathcal{F}_v = \mu_v$ dla pewnego $v \in \bigcup \mu$. Wówczas dla każdej formuły φ mielibyśmy: $v \Vdash_\mu \Box\varphi \Leftrightarrow v \Vdash_\mu \blacksquare\varphi \Leftrightarrow w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$.

Także i to rozwiązanie musieliśmy doprecyzować (choć nie wykluczamy, że jest możliwe zbudowanie poprawnego modelu kanonicznego tylko na bazie powyższych założeń). Wprowadźmy następującą definicję:

Definicja 4.56. Definiujemy **GTf**-model jako piątkę $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathbf{f}, \mathcal{N}, V_\mu \rangle$ taką, że μ to uogólniona topologia na W, V to wartościowanie zmiennych zdaniowych (tj. funkcja z PV w $P(W)$), zaś zbiór W dzieli się na dwa rozłaczne podzbiory Y_1 i Y_2, przy czym:

(1) Jeśli $w \in Y_1$, to przypisujemy temu światu pewien świat $v \in \bigcup \mu$; przypisanie to określa funkcja $\mathbf{f}$ (zatem $\mathbf{f}$ to funkcja z Y_1 w $\bigcup \mu$).
(2) Jeśli $w \in Y_2$, to przypisujemy temu światu pewną rodzinę otoczeń $\mathcal{N}_w$, niekoniecznie związaną z $\bigcup \mu$. Tak więc $\mathcal{N}$ to funkcja z Y_2 w $P(P(W))$.

Jeżeli chodzi o wymuszanie formuł złożonych, to oczywiście dla spójników boolowskich przebiega ono w sposób standardowy, natomiast w odniesieniu do modalności proponujemy następującą definicję:

Definicja 4.57. W każdym **GTf**-modelu $M_\mu = \langle W_\mu, \mu, \mathbf{f}, \mathcal{N}, V_\mu \rangle$, dla każdego świata $w \in W$ i dla każdej formuły φ:
$w \Vdash_\mu \Box\varphi \Leftrightarrow$ istnieje $X \in \mu$ taki że $w \in X$ oraz dla każdego $v \in X$, $v \Vdash_\mu \varphi$.
$w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi \Leftrightarrow$

(1) Istnieje $X \in \mu$ taki że $\mathbf{f}(w) \in X$ oraz dla każdego $v \in X$, $v \Vdash_\mu \varphi$; o ile $w \in Y_1$.
(2) $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$; o ile $w \in Y_2$.

A zatem dla punktów z Y_1 wymuszanie formuł postaci $\blacksquare\varphi$ zależy od tego, czy $f(w)$ wymusza $\Box\varphi$; zaś punkty z Y_2 "żyją własnym życiem", by użyć pewnego kolokwializmu. W ich przypadku mamy osobną funkcję otoczeniową i oczekujemy, że $V(\varphi)$ będzie jednym z takich otoczeń.

Zdefiniujmy logikę **gTop** jako następujący zbiór reguł i formuł: **CPC** $\cup$ { $M_\Box$, $T_\Box$, $4_\Box$, $RE_\Box$, $RE_\blacksquare$, MP }. Jak widać, w odniesieniu do $\Box$ jest to znów **MT4**, natomiast w odniesieniu do $\blacksquare$ na razie nie zakładamy prawie nic: względem tego operatora nasz system to po prostu najsłabsza logika modalna, posiadająca jedynie regułę ekstensjonalności. W tym sensie można nasz system postrzegać jako połączenie dwóch systemów: silniejszego i słabszego.

Określmy teraz model kanoniczny:

Definicja 4.58. Kanonicznym **GTf**-modelem nazywamy strukturę $\langle W_\mu, \mu, \mathbf{f}, \mathcal{N}, V_\mu \rangle$, w której:

(1) W_μ to zbiór teorii maksymalnych logiki **gTop**.
(2) V_μ to funkcja z PV w $P(W)$ taka, że dla każdej $q \in PV$, $V(q) = \{w \in W; q \in W\}$.

(3) μ to podrodzina W złożona z wszystkich sum *zbiorów bazowych*, przy czym pojedynczy zbiór bazowy ma postać $\widehat{\Box\varphi} = \{w \in W; \Box\varphi \in w\}$.
(4) Y_1 to zbiór takich teorii z W, dla których istnieje teoria $v \in \bigcup \mu$ taka, że dla każdej formuły φ mamy: $\Box\varphi \in v \Leftrightarrow \blacksquare\varphi \in w$.
(5) Y_2 to zbiór $W \setminus Y_1$.
(6) $\mathbf{f}$ to funkcja z Y_1 w $\bigcup \mu$ taka, że $\mathbf{f}(w) = v$, gdzie v rozumiane tak jak w punkcie 4.
(7) $\mathcal{N}$ to funkcja z Y_2 w $P(P(W))$ określona tak: $\mathcal{N}_w = \{\widehat{\varphi}; \blacksquare\varphi \in w\}$.

Zauważmy, że dla światów (teorii) z Y_2 funkcja otoczeniowa jest określona na wzór analogicznej funkcji z *minimalnego* otoczeniowego modelu kanonicznego dla najsłabszej logiki modalnej **E** (por. [101]). Korzystając jedynie z ogólnego twierdzenia Lindenbauma oraz z reguły $\blacksquare$-ekstensjonalności można dowieść dwóch lematów:

Lemat 4.59. *Niech W_μ to kolekcja wszystkich teorii maksymalnych logiki* **gTop** *i niech $\{z \in W; \varphi \in z\} = \{z \in W; \psi \in z\}$. Wtedy $\varphi \rightarrow \psi \in$* **gTop**.

Lemat 4.60. *W kanonicznym* **GTf** *-modelu mamy następującą własność: dla każdej teorii maksymalnej w, jeśli $\{z \in W; \varphi \in z\} \in \mathcal{N}_w$ oraz $\{z \in W; \varphi \in z\} = \{z \in W; \psi \in z\}$, to $\blacksquare\psi \in w$.*

Teraz możemy przedstawić podstawowe twierdzenie dla modeli kanonicznych:

Twierdzenie 4.61. *W kanonicznym* **GTf** *-modelu zachodzi dla każdej formuły γ i dla każdego świata (teorii) w następująca zależność:*
$w \Vdash_\mu \gamma \Leftrightarrow \gamma \in w$.

Dowód. Tradycyjnie już pomijamy spójniki boolowskie i przechodzimy do modalnych.

(1) Załóżmy, że $\gamma = \Box\varphi$. Dowód jest niemal identyczny z dowodem w [62]: rzecz i tak dotyczy jedynie światów z $\bigcup \mu$, przy czym jawnie skorzystamy z aksjomatów **MT4** w odniesieniu do $\Box$.

($\Leftarrow$)

Przypuśćmy, że $\Box\varphi \in w$. Zatem $w \in \widehat{\Box\varphi} \in \mu$. Z powodu aksjomatu T mamy $\widehat{\Box\varphi} \subseteq \widehat{\varphi}$. Wnioskujemy więc, że istnieje $X = \widehat{\Box\varphi}$ taki, że $X \in \mu$, $w \in X$ i dla wszystkich $v \in X$, $v \in \widehat{\varphi}$, tj. $\varphi \in v$. Z założenia indukcyjnego, $v \Vdash_\mu \varphi$. Zatem $w \Vdash_\mu \Box\varphi$.

($\Rightarrow$)

Załóżmy, że $w \Vdash \Box\varphi$. Wtedy istnieje $X \in \mu$ taki że $w \in X$ i dla każdego $v \in X$, $v \Vdash \varphi$. Otóż X ma postać sumy zbiorów bazowych, zatem istnieje zbiór bazowy $\widehat{\Box\psi}$ (dla pewnej ψ) taki, że $w \in \widehat{\Box\psi}$ oraz dla wszystkich $v \in \widehat{\Box\psi}$ mamy $v \Vdash \varphi$ (z założenia indukcyjnego znaczy to, że $\varphi \in v$ oraz $v \in \widehat{\varphi}$).

Widzimy, że $\widehat{\Box\psi} \subseteq \widehat{\varphi}$. Stąd wnioskujemy, że implikacja $\Box\psi \rightarrow \varphi$ jest twierdzeniem: gdyby bowiem nie była, to istniałaby pewna maksymalna, niesprzeczna teoria taka, że należałyby do niej zarówno $\Box\psi$, jak i $\neg\varphi$. Wtedy jednak nie byłoby prawdą to, co już wiemy, mianowicie, że $\widehat{\Box\psi} \subseteq \widehat{\varphi}$.

Przy pomocy reguły *RM* dowodzimy implikacji $\Box\Box\psi \rightarrow \Box\varphi$. Na mocy aksjomatu *4* akceptujemy formułę $\Box\psi \rightarrow \Box\varphi$. Wówczas $\widehat{\Box\psi} \subseteq \widehat{\Box\varphi}$. Tak więc $\Box\varphi \in w$.

(2) Załóżmy, że $\gamma := \blacksquare\varphi$.

($\Leftarrow$)

Mamy dwie możliwości:

(a) $w \in Y_1$. Załóżmy, że $\blacksquare\varphi \in w$. Ale wtedy $\Box\varphi \in u = \mathbf{f}(w)$. Tak więc $u \in \widehat{\Box\varphi}$. Z definicji $\widehat{\Box\varphi}$ to zbiór bazowy topologii μ, w szczególności więc element μ. Z aksjomatu *T* mamy, że $\widehat{\Box\varphi} \subseteq \widehat{\varphi}$. Istnieje zatem $X = \widehat{\Box\varphi}$ taki że $X \in \mu$, $u \in X$ oraz dla wszystkich $v \in X$ mamy $\varphi \in v$, co z założenia indukcyjnego oznacza, że $v \Vdash_\mu \varphi$. Ale to oznacza[34], że $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$.

(b) $w \in Y_2$. Załóżmy, że $\blacksquare\varphi \in w$. Ale wtedy z definicji funkcji $\mathcal{N}$ mamy, że $\{z \in W; \varphi \in z\} = \widehat{\varphi} \in \mathcal{N}_w$. Przez założenie indukcyjne $\widehat{\varphi} = \{z \in W; z \Vdash_\mu \varphi\} \in \mathcal{N}_w$. Zatem $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$.

($\Rightarrow$)

Znów mamy dwie możliwości:

(a) $w \in Y_1$. Załóżmy, że $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$. Zatem istnieje taki $X \in \mu$, że $u = \mathbf{f}(w) \in X$ oraz dla każdego $v \in X$, $v \Vdash_\mu \varphi$. Skoro $X \in \mu$, to X jest sumą pewnej liczby zbiorów bazowych. Wśród nich musi być (dla pewnej formuły β) pewien zbiór $\widehat{\Box\beta}$ taki, że $u \in \widehat{\Box\beta}$. Oczywiście $\widehat{\Box\beta} \subseteq X$, zatem dla każdego $v \in \widehat{\Box\beta}$ mamy $v \Vdash_\mu \varphi$. Z założenia indukcyjnego oznacza to, że $\varphi \in v$. Tak więc $\widehat{\Box\beta} \subseteq \widehat{\varphi}$. Podobnie jak w podpunkcie dotyczącym $\Box$, powołujemy się na to, że $\Box\beta \to \varphi$ jest twierdzeniem. Stosujemy teraz regułę *RM* , aby dowieść implikacji $\Box\Box\beta \to \Box\varphi$. Poprzez aksjomat *4* $\Box$ otrzymujemy $\Box\beta \to \Box\varphi$. To znaczy, że $u \in \widehat{\Box\beta} \subseteq \widehat{\Box\varphi}$, czyli że $\Box\varphi \in u$. Ale $u = \mathbf{f}(w)$, zatem $\blacksquare\varphi \in w$.

(b) $w \in Y_2$. Załóżmy, że $w \Vdash_\mu \blacksquare\varphi$. Zatem $\{z \in W; z \Vdash_\mu \varphi\} \in \mathcal{N}_w$. Z indukcji mamy w takim razie, że $\{z \in W; \varphi \in z\} \in \mathcal{N}_w$. Z definicji funkcji $\mathcal{N}$ oraz z Lematu 4.60 oznacza to, że $\blacksquare\varphi \in w$.

$\Box$

Logika **gTop** ma niestety tę wadę, że bardzo słabo związane są w niej ze sobą oba operatory modalne. W istocie na poziomie aksjomatów nie są one powiązane w ogóle. Tymczasem naturalne byłoby oczekiwanie przynajmniej takiego aksjomatu jak $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$. W ten sposób jedna konieczność byłaby niejako silniejsza od drugiej, a tego zapewne byśmy chcieli. Niestety, próby "mechanicznego" dodania tego jednego schematu do pakietu składającego się na **gTop** zawiodły, jeżeli chodzi o zbudowanie takiego modelu kanonicznego, który gwarantowałby pełność systemu.

Oczywiście nietrudno uformować "abstrakcyjny" model, w którym żądany aksjomat będzie prawdziwy. Wystarczy przyjąć w **GTf** -modelu, iż zawsze $\bigcup\mu \subseteq Y_1$ oraz $\mathbf{f}(w) = w$ dla wszystkich $w \in \bigcup\mu$. Problem w tym, że nic nie wskazuje na to, by oczekiwane zawieranie zachodziło w potencjalnym (hipotetycznym) modelu kanonicznym. Zakładamy przy tym, że byłby to dotychczasowy **GTf** -model, tyle że zbudowany z teorii logiki **gTop** uzupełnionej o $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$.

Można też inaczej wymusić spełnianie tego aksjomatu: ustalając np., że jeżeli $w \in \bigcup\mu$, to wymuszanie $\blacksquare\varphi$ jest tożsame z wymuszaniem $\Box\varphi$ lub nawet samego φ. Niestety, także i w tych przypadkach zawiodły rozmaite próby wpasowania modelu kanonicznego w odpowiedni wzorzec; również przy modyfikacji samej logiki (np. przez dodanie dodatkowych aksjomatów wykorzystujących $\blacksquare$). Nie zamykamy całkowicie tej drogi, tym niemniej na obecnym etapie pozostaje pewien niedosyt.

[34] Znaczy to również, że $u \Vdash_\mu \Box\varphi$.

5. Infra-topologie w kontekście logicznym

5.1. **Przestrzenie infra-topologiczne.**

5.1.1. *Uwagi terminologiczne.* Główna idea przestrzeni infra-topologicznych nie jest może skomplikowana, niemniej wydaje się, że wyróżnione zostały one (w szczególności pod tą nazwą) dopiero niedawno, mianowicie w pracy [97] Al-Odhariego. Później autor ten badał owe struktury w [98]. Tematem zajęli się też inni matematycy (por. [40], [138]).

Można wspomnieć, że pojęcie "infra-topologii" pojawiło się również w pracy [18]. Tam jednak, jak się wydaje, oznaczało coś innego: autorzy pisali o "parze (X, T), w której X to zbiór niepusty, zaś T to rodzina podzbiorów X, do której należy X". W tym sensie infra-topologia byłaby strukturą niejako symetryczną wobec struktury słabej.

My będziemy posługiwać się definicją Al-Odhariego. Niestety, jego prace zawierają pewne nieścisłości lub nawet błędy [35].

Materiał prezentowany w tym rozdziale w większości pokrywa się z zakresem naszej pracy [143].

5.1.2. *Zbiory infra-otwarte.* Al-Odhari pisze w swej oryginalnej definicji, że w przestrzeni infra-topologicznej "dowolny [*any arbitrary*] przekrój zbiorów infra-otwartych jest infra-otwarty"; względnie, że do τ_{iW} należy "przekrój elementów dowolnej [*any*] podkolekcji τ_{iW}". Zarazem jednak (przy użyciu symboliki matematycznej) wprowadza słabszy wymóg przekroju skończonego. Uważamy, że takie podejście jest właściwsze.

Definicja 5.1. Niech W będzie dowolnym zbiorem. *Przestrzenią infra-topologiczną* (infra-przestrzenią) na W nazywamy kolekcję τ_{iX} podzbiorów X taką, że:
(1) $\emptyset, W \in \tau_{iW}$.
(2) Jeżeli dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $A_i \in \tau_{iW}$, to $\bigcap A_i \in \tau_{iW}$.

Jeśli $A \in \tau_{iW}$, to mówimy, że A jest zbiorem *infra-otwartym* (w skrócie *i-otwartym*).

Teraz możemy wyróżnić te infra-topologie, które są domknięte na *dowolne* przekroje (nazwiemy je infra-topologiami Aleksandrowa). Z kolei *uogólnionymi* infra-topologiami nazwiemy takie, do których nie należy W (będzie to więc klasa szersza od zdefiniowanej przed chwilą). Truizmem będzie stwierdzenie, że każda przestrzeń topologiczna jest zarazem infra-przestrzenią.

W gruncie rzeczy infra-topologie utożsamiać można z domkniętymi na skończone przekroje strukturami minimalnymi (niektóre ich własności badano w [61]).

Poniżej przedstawiamy kilka przykładów takich przestrzeni. Pierwsze trzy zaczerpnęliśmy z [97], reszta to nasza własna inwencja:

Przykład 5.2. Poniższe przestrzenie są infra-topologiczne (i nie są topologiczne):
(1) $W = \{a, b, c\}$, $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}\}$. Zauważmy, że $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_{iW}$.
(2) $W = \{a, b, c, d\}$, $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Na przykład $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \notin \tau_{iW}$.
(3) $W = \{a, b, c, d\}$, $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.
(4) $W = \{a, b, c, d\}$, $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Tutaj $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in \tau_{iW}$, ale $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \tau_{iW}$.

[35] Nie wnikamy w przyczynę tego faktu. Zapewne zostały one opublikowane bez należytej recenzji lub korekty. Naszym celem nie jest krytyka, a jedynie uporządkowanie podstawowych pojęć. Musimy także precyzyjnie wyjaśnić, które terminy przyjmujemy za Al-Odharim, a które sami wprowadzamy. Z tego zaś wynika konieczność wyróżnienia wspomnianych usterek.

(5) $W = \{a, b, c, d\}$, $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$.

(6) $W = \mathbb{N}$ i zakładamy, że jedyne zbiory i-otwarte to $\mathbb{N}$ oraz te skończone podzbiory $\mathbb{N}$, których moc (liczebność) nie przekracza pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$. Każdy przekrój kolekcji takich zbiorów też będzie mieć liczbność nie większą niż $\leqslant k$ (zatem mamy tu do czynienia z infra-topologią Aleksandrowa), a zarazem łatwo znaleźć dwa zbiory i-otwarte w tym sensie, których suma osiągnie liczebność większą niż k. Jeżeli założymy, że $\mathbb{N} \notin \tau_{iW}$ to otrzymamy uogólnioną wersję tej przestrzeni.

(7) $W = \mathbb{R}$ i zakładamy, że jedyne zbiory i-otwarte to $\mathbb{R}$ oraz te podzbiory $\mathbb{R}$, których długość (miara Lebesgue'a) nie przekracza pewnej stałej $y \in \mathbb{R}$. Znów otrzymujemy infra-topologię Aleksandrowa, którą łatwo uogólnić.

(8) $W = \mathbb{Z}$ oraz $\tau_{iW} = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}^+\}$. Zauważmy, że $\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset \in \tau_{iW}$, ale $\mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \notin \tau_{iW}$. Oczywiście liczby całkowite możemy tu zastąpić wymiernymi lub rzeczywistymi. Możemy też zaliczyć $\{0\}$ do zbiorów i-otwartych.

(9) $W = [-1, 1]$, zaś $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}], [0, \frac{1}{4}], [0, \frac{1}{2}]\}$.

(10) $W = \mathbb{R}$ i zakładamy, że jedyne i-otwarte zbiory to $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $\{0\}$, przedziały postaci $(-\infty, a]$, $a \leqslant 0$ oraz przedziały postaci $[b, +\infty)$, $b \geqslant 0$. Rzecz jasna przekrój dwóch dopuszczalnych przedziałów ma odpowiednią postać (w szczególności może być pusty). Z drugiej strony, ich suma może znajdować się poza rodziną (weźmy np. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$). Możemy też zastąpić $\leqslant$ i $\geqslant$ w powyższej definicji przez nierówności ostre (wówczas możemy też, choć nie musimy, przyjąć, że $\{0\}$ *nie* jest i-otwarty).

Tw. 2.4. w [97] jest mylące. Mówi ono, że suma dwóch infra-przestrzeni (zadanych na tym samym uniwersum W) jest również infra-topologią[36]. Zarazem jednak w późniejszej uwadze czytamy, że "w ogólności suma dwóch przestrzeni infra-topologicznych nie musi być przestrzenią infra-topologiczną". W istocie, nie musi, o czym świadczy zamieszczony dalej kontrprzykład, który reprodukujemy (z małą poprawką):

Przykład 5.3. Niech $W = \{a, b, c, d\}$, $\tau_{iW} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ oraz $\mu_{iW} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Zatem $\tau_{iW} \cup \mu_{iW} = \{\emptyset, W, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$[37]. Widzimy, że $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_{iW} \cup \mu_{iW}$.

Możemy zatem powiedzieć:

Twierdzenie 5.4. *Jeżeli τ_{iW} i μ_{iW} są dwiema infra-topologiami na W, to $\tau_{iW} \cap \mu_{iW}$ jest nadal infra-topologią na W, natomiast $\tau_{iW} \cup \mu_{iW}$ niekoniecznie.*

5.1.3. *Infra-wnętrza.* Al-Odhari zdefiniował infra-wnętrze zbioru $A \subseteq W$ w standardowy sposób: jako "sumę wszystkich zbiorów infra-otwartych zawartych w A". Później pisze jednak, że jest to "największy[38] zbiór infra-otwarty" (zawarty w A). Ale to niekoniecznie jest prawda: jak wiemy, suma zbiorów i-otwartych nie musi być i-otwarta. W razie czego można to pokazać na prostym przykładzie:

Przykład 5.5. Niech (W, τ_{iW}) będzie jak w Przykładzie 5.2 (2). Rozważmy $B = \{a, b, c\} \notin \tau_{iW}$. Otóż $\{a\} \cup \{c\} \cup \{a, b\} \cup \{a, c\} = B$, ale B nie jest największym zbiorem i-otwartym zawartym w sobie, bo nie jest w ogóle i-otwarty.

Z tego powodu proponujemy dwie poniższe definicje:

[36] Twierdzenie to powtórzono potem w [98].

[37] Al-Odhari błędnie opisuje ten zbiór jako $\{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$. Może być to po prostu błąd w druku.

[38] W istocie pisze o "najmniejszym" (smallest), ale można to uznać za drobne przeoczenie; intencja autora jest oczywista.

Definicja 5.6. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq W$. Wówczas *infra-wnętrzem* (*i-wnętrzem*) zbioru A nazywamy:
$iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq W; O \in \tau_{iW}, O \subseteq A\}$.

Definicja 5.7. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq W$. Powiemy, że A jest zbiorem *i-poprawnym* (*i-genuine*), jeżeli $iInt(A)$ jest i-otwarty. Zbiór wszystkich i-poprawnych zbiorów wyznaczonych przez daną infra-topologię τ_{iW} na W będziemy określać jako $ig\tau_{iW}$.

Wróćmy do Przykładu 5.5. W tym przypadku B nie jest i-poprawny. Z drugiej strony, $\{a, b, d\}$ jest i-poprawny, ponieważ $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau_{iW}$. W Przykładzie 5.2 (8) mamy $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, który jest i-poprawny (ale nie i-otwarty). To samo można powiedzieć o $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

Zachodzą dwa poniższe lematy:

Lemat 5.8. *Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq W$ będzie i-poprawny. Wtedy $iInt(A)$ jest największym (w sensie inkluzji) zbiorem otwartym zawartym w A.*

Lemat 5.9. *Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i nich $A, B \subseteq W$. Wtedy:*

(1) Jeżeli A jest i-otwarty, to jest również i-poprawny, tj. $\tau_{iW} \subseteq ig\tau_{iW}$.
(2) Jeżeli A jest i-otwarty, to $iInt(A) = A$. Odwrotna zależność nie jest prawdziwa.
(3) $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$.
(4) Każdy singleton jest i-poprawny.
(5) Jeżeli $iInt(A) = A$, to A jest otwarty lub nie jest i-poprawny.
(6) Jeżeli $iInt(A) = \emptyset$, to A jest i-poprawny.

Dowód. Dowód jest prosty. Co do punktu trzeciego, to przebiega on tak samo jak w przestrzeniach topologicznych. Rozważmy kwestię singletonów. Jeżeli $\{a\} \in \tau_{iW}$, to oczywiście $\{a\}$ jest i-poprawny (co wynika z pierwszego punktu lematu). Jeżeli $\{a\}$ nie jest i-otwarty, to zawsze jest prawdą, że $\emptyset \subseteq \{a\}$ (i zarazem $\emptyset$ to jedyny zbiór i-otwarty zawarty w naszym singletonie). Rozumowanie to można rozszerzyć na punkt (6). □

Poniżej sprawdzamy podstawowe własności zbiorów, o których mowa.

Lemat 5.10. *Zbiory i-poprawne (i nie-i-poprawne) w przestrzeniach infra-topologicznych mają następujące własności:*

(1) Suma dwóch zbiorów i-poprawnych może nie być i-poprawna.

Dowód. Weźmy $W = \{a, b, c, d, e\}$ oraz $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$. Rozważmy $A = \{a, b\}$ oraz $B = \{c\}$. Oba zbiory należą do τ_{iW}, zatem także do $ig\tau_{iW}$. Zarazem $iInt(A \cup B) = \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\} \notin \tau_{iW}$. Zatem M nie jest i-poprawny. □

(2) Suma dwóch zbiorów nie-i-poprawnych może być i-poprawna.

Dowód. Rozważmy tę samą infra-przestrzeń. Weźmy $A = \{b, d, c\}$ oraz $B = \{a, c, d, e\}$. Oczywiście $iInt(A) = \{b, c\} \notin \tau_{iX}$ oraz $iInt(B) = \{a, c\} \notin \tau_{iX}$. Tym niemniej, $A \cup B = W$, zaś W jest i-poprawny. □

(3) Przekrój dwóch zbiorów i-poprawnych jest i-poprawny.

Dowód. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną $A, B \in ig\tau_{iX}$. Zatem $iInt(A) \in \tau_{iW}$ oraz $iInt(B) \in \tau_{iW}$. Stąd $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B) \in \tau_{iW}$. Dlatego $A \cap B$ jest i-poprawny.

Zauważmy, że gdybyśmy ograniczyli definicję zbiorów i-poprawnych tylko do tych, które mają niepuste i-otwarte infra-wnętrze, to powyższe stwierdzenie nie byłoby prawdziwe. Wystarczy znaleźć w pewnej przestrzeni W takie A, B, że $iInt(A) \neq \emptyset$, $iInt(B) \neq$, ale $iInt(A) \cap iInt(B) = \emptyset$. □

(4) *Przekrój dwóch zbiorów nie-i-poprawnych może być i-poprawny.*

Dowód. Weźmy $W = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}\}$ i rozważmy $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$. Widzimy, że $iInt(A) = \{a, b, c\} \notin \tau_{iW}$, zatem $A \notin ig\tau_{iW}$. Also $iInt(B) = \{a, b\} \notin \tau_{iW}$. Zarazem jednak $A \cap B = \{a, b\} \in \tau_{iW} \subseteq ig\tau_{iW}$.

Uwaga 5.11. Oczywiście moglibyśmy wybrać w jakiejś przestrzeni takie dwa zbiory nie-i-poprawne, które kroiłyby się pusto, ale w miarę możliwości staramy się sięgać po przykłady mniej trywialne.

□

Zauważmy, że z trzeciej zależności w powyższym lemacie wynika, iż $ig\tau_{iW}$ jest infra-topologią na W. Co więcej, z Lematu 5.9 (1) wnosimy, że τ_{iW} jest słabsza (ang. *coarser*) niż $ig\tau_{iW}$ (albo też, równoważnie, $ig\tau_{iW}$ jest silniejsza (ang. *finer*) niż τ_{iW}).

Z drugiej strony ta sama zależność uprawnia nas do mówienia o zbiorach *ściśle i-poprawnych*, tj. takich, że $iInt(A)$ jest i-otwarty oraz niepusty.

Na bazie Lematu 5.9 (5) wprowadzamy inną klasę podzbiorów powiązaną z τ_{iW}:

Definicja 5.12. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq W$. Powiemy, że A jest *pseudo-infra-otwarty* (ps-i-otwarty), jeżeli $iInt(A) = A$. Zbiór wszystkich ps-i-otwartych wyznaczonych przez daną infra-topologię τ_{iW} na W będziemy określać jako $p\tau_{iW}$.

Oczywiście każdy zbiór i-otwarty jest zarazem ps-i-otwarty. W istocie nasza definicja to infra-topologiczna wersja pojęcia wprowadzonego przez Chakrabartiego i Dasguptę (zob. [19] w kontekście struktur minimalnych. Oczywiście dla każdego $A \subseteq W$, $iInt(A) \in p\tau_{iW}$.

Jeżeli $A, B \in p\tau_{iW}$, to $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B) = A \cap B$. Co więcej, możemy też dowieść, że $iInt(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$, jeżeli $\mathcal{A}$ to rodzina zbiorów ps-i-otwartych. Pierwsza inkluzja, tj. $\subseteq$, jest oczywista. Co do drugiej, $\supseteq$, to załóżmy, że $x \in \bigcup \mathcal{A}$, ale $x \notin iInt(\bigcup \mathcal{A})$. Zatem x należy do pewnego ps-i-otwartego zbioru $A \in \mathcal{A}$, ale dla każdego i-otwartego G takiego, że $G \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, $x \notin G$. Wiemy jednak, że $A = iInt(A)$, więc x jest w pewnym i-otwartym $B \subseteq A$. Wszelako taki B musi być zawarty w $\bigcup \mathcal{A}$. Ta sprzeczność, w zestawieniu z pierwszą częścią niniejszego akapitu, pozwala nam stwierdzić, że $p\tau_{iX}$ jest topologią na W (rzecz jasna $iInt(\emptyset) = \emptyset$ oraz $iInt(W) = W$).

Inna klasa, która z pewnych względów jest interesująca, to klasa minimalnych zbiorów i-otwartych. W ślad za [16], wprowadzamy poniższą definicję:

Definicja 5.13. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną. Powiemy, że $A \in \tau_{iW}$ jest minimalnym zbiorem infra-otwartym, jeżeli dla każdego $B \in \tau_{iW}$ jest $A \cap B = \emptyset$ lub $A \subseteq B$.

Wróćmy do Przykładu 5.2 (8), ale zakładając, że $\{0\}$ jest i-otwarty. Zatem $\{0\}$ jest minimalny: po pierwsze, jest zawarty w $\mathbb{Z}$ (i w sobie), a po drugie, kroi się pusto z pozostałymi zbiorami i-otwartymi, tj. $\emptyset$, $\mathbb{Z}^-$ oraz $\mathbb{Z}^+$. Rozważmy teraz Przykład 5.2 (10). W tym wypadku $\{0\}$ też jest minimalny. Załóżmy na moment, że $\{0\}$ wciąż zalicza się do zbiorów i-otwartych, ale równocześnie nasze przedziały są otwarte, tj. $a < 0$, $b > 0$. Ponownie $\{0\}$ jest minimalny, ale teraz ma pusty przekrój z każdym i-otwartym zbiorem innym niż $\mathbb{R}$.

5.1.4. *Zbiory infra-domknięte.* Za Al-Odharim powtarzamy następującą definicję:

Definicja 5.14. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną. Podzbiór $C \subseteq W$ nazwiemy *infra-domkniętym* (*i-domkniętym*), jeżeli $W \setminus C = -C \in \tau_{iW}$, tzn. $-C$ jest i-otwarty.

Symbolem $c\tau_{iW}$ będziemy oznaczać kolekcję wszystkich zbiorów i-domkniętych związanych z τ_{iW}.

W Tw. 3.1. w [97] autor pisze, że "dowolny skończony przekrój zbiorów infra-domkniętych jest infra-domknięty"[39]. Wszelako to nieprawda, jak pokazuje poniższy przykład:

Przykład 5.15. Niech (W, τ_{iW}) będzie jak w Przykładzie 5.2 (2). Zbiory $\{c, d\}$ i $\{b, d\}$ są i-domknięte (gdyż $\{a, b\}$ i $\{a, c\}$ są i-otwarte). Zarazem jednak $\{c, d\} \cap \{b, d\} = \{d\} \notin c\tau_{iW}$.

Wbrew opinii Al-Odhariego, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.16. *Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną. Niech $A, B \in c\tau_{iW}$. Wtedy $A \cup B \in c\tau_{iW}$, tzn. skończona suma zbiorów i-domkniętych jest i-domknięta.*

Dowód. Rozważmy $-(A \cup B) = -A \cap -B$. Przekrój zbiorów i-otwartych jest i-otwarty, zatem $-(A \cup B) \in \tau_{iW}$. Dlatego $A \cup B \in c\tau_{iW}$. □

W istocie wynik ten można wyprowadzić z Tw. 2.4. w [61]. Autorzy piszą o uogólnionych strukturach słabych domkniętych na skończone przekroje.

5.1.5. *Infra-domknięcie.* Co z pojęciem domknięcia? W [97] infra-domknięcie A zdefiniowano jako przekrój wszystkich zbiorów i-domkniętych, zawierających A. Wbrew uwadze z tej pracy, takie domknięcie nie jest bynajmniej identyczne z *najmniejszym* zbiorem infra-domkniętym, zawierającym A.

Przykład 5.17. Niech (W, τ_{iW}) będzie jak w Przykładzie 5.2 (2). Rozważmy zbiór $\{d\}$. Zawiera się on w następujących zbiorach i-domkniętych: $\{c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$ oraz W. Rzecz jasna przekrojem tych zbiorów jest sam $\{d\}$. Ale $\{d\}$ nie jest i-domknięty (ani też, swoją drogą, i-otwarty).

Postulujemy zatem wprowadzenie poniższych dwóch definicji (pierwszą cytujemy za Al-Odharim):

Definicja 5.18. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq W$. Wtedy *infra-domknięcie* (*i-domknięcie*) A definiujemy jako:
$iCl(A) = \bigcap\{C \subseteq W : C \in c\tau_{iW}, A \subseteq C\}$.

Definicja 5.19. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq X$. Powiemy, że A jest zbiorem *c-poprawnym* (ang. *c-genuine*), jeżeli $iCl(A)$ jest infra-domknięty. Zbiór wszystkich zbiorów c-poprawnych wyznaczonych przez daną infra-topologię τ_{iW} na W będziemy określać jako $cg\tau_{iW}$.

Wróćmy do poprzedniego przykładu. Pokazaliśmy już, że $iCl(\{d\}) = \{d\} \notin c\tau_{iW}$, zatem $\{d\}$ nie jest c-poprawny (przy okazji widzimy, że singletony nie muszą należeć do $cg\tau_{iW}$). Z drugiej strony, $\{a, b\}$ *jest* c-poprawny. Zauważmy, że jedyne infra-domknięte zbiory, w których zawarty jest $\{a, b\}$, to $\{a, b, d\}$ oraz W. Ich przekrój to $\{a, b, d\}$, przy czym $\{a, b, d\} \in c\tau_{iW}$ (albowiem $\{c\} \in \tau_{iW}$).

Znów mamy dwa lematy:

[39] "any arbitrary finite intersection of infra-closed sets is an infra-closed set".

Lemat 5.20. *Niech* (W, τ_{iW}) *będzie przestrzenią infra-topologiczną i nich* $A \subseteq W$ *będzie c-poprawny. Wtedy* $iCl(A)$ *jest najmniejszym (w porządku zawierania) zbiorem infra-domkniętym zawierającym* A*.*

Lemat 5.21. *Niech* (W, τ_{iW}) *będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech* $A, B \subseteq W$*. Wówczas:*

(1) *Jeżeli* A *jest i-domknięty, to jest również c-poprawny.*
(2) *Jeżeli* A *jest i-domknięty, to* $iCl(A) = A$*. Odwrotna zależność nie jest prawdziwa.*
(3) $iCl(A \cup B) = iCl(A) \cup iCl(B)$*.*

Dowód. Zob. Tw. 2.4. a) w [61]. □

(4) $iCl(A \cap B) \subseteq iCl(A) \cap iCl(B)$*.*

Uwaga 5.22. Nie ma tu równości. Weźmy (W, τ_{iW}) z Przykładu 5.2 (4) i rozważmy $A = \{b\}$, $B = \{c\}$. Teraz $iCl(A) = \{b, d\}$ oraz $iCl(B) = \{c, d\}$. Zatem $iCl(A) \cap iCl(B) = \{d\}$. Zarazem jednak $A \cap B = \emptyset$ oraz $iCl(A \cap B) = \emptyset$.

(5) *Jeżeli* $iCl(A) = A$*, to* A *jest infra-domknięty lub nie jest c-poprawny.*

Następny lemat dotyczy sum i przekrojów zbiorów c-poprawnych:

Lemat 5.23. *Zbiory c-poprawne (i nie-c-poprawne) w przestrzeniach infra-topologicznych mają następujące własności:*

(1) *Suma dwóch zbiorów c-poprawnych jest c-poprawna.*

Dowód. Niech (W, τ_{iW}) będzie dowolną infra-przestrzenią. Załóżmy, że $A, B \in cg\tau_{iW}$. Zatem $A \subseteq iCl(A) \in c\tau_{iW}$ oraz $B \subseteq iCl(B) \in c\tau_{iW}$. Stąd $A \cup B \subseteq iCl(A) \cup iCl(B) \in c\tau_{iW}$ (jak wiemy, suma zbiorów i-domkniętych jest i-domknięta). Załóżmy teraz, że $iCl(A) \cup iCl(B)$ *nie jest* przekrojem *wszystkich* i-domkniętych zbiorów zawierających $A \cup B$. Istnieje zatem $G \in c\tau_{iW}$ taki że $A \cup B \subseteq G$, ale $iCl(A) \cup iCl(B) \nsubseteq G$. To oznacza, że $iCl(A) \nsubseteq G$ lub $iCl(B) \nsubseteq G$. Bez straty ogólności załóżmy, że $iCl(A) \nsubseteq G$. Wszelako $A \subseteq A \cup B \subseteq G$, zaś $iCl(A)$ jest przekrojem *wszystkich* zbiorów infra-domkniętych zawierających A. □

(2) *Suma dwóch zbiorów nie-c-poprawnych może być c-poprawna.*

Dowód. Weźmy $W = \{a, b, c\}$ oraz $\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Teraz $c\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$. $\{a\}$ i $\{b\}$ nie są c-poprawne, ale $\{a, b\} \in c\tau_{iW} \subseteq cg\tau_{iW}$. □

(3) *Przekrój dwóch zbiorów c-poprawnych nie musi być c-poprawny.*

Dowód. Przywołajmy Przykład 5.2 (3). Otóż $\{a, b, c\}$ i $\{a, d\}$ są c-poprawne (w istocie są nawet i-domknięte), ale $\{a\}$ taki nie jest. □

(4) *Przekrój dwóch zbiorów nie-c-poprawnych może być c-poprawny.*

Dowód. Rozważmy Przykład 5.2 (4). Mamy $c\tau_{iW} = \{\emptyset, W, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{d\}\}$. Otóż $\{a, d\}$ i $\{b, d\}$ nie są c-poprawne, ale $\{d\}$ jest infra-domknięty, zatem także c-poprawny.

Uwaga 5.24. Podobnie jak w analogicznej uwadze, poczynionej przy okazji Lem. 5.10 (4), wystarczyłoby znaleźć dwa nie-c-poprawne zbiory o pustym przekroju.

□

Przez analogię z ps-i-otwartością wprowadzamy następujący termin:

Definicja 5.25. Niech (W, τ_{iW}) będzie przestrzenią infra-topologiczną i niech $A \subseteq W$. Powiemy, że A jest *pseudo-infra-domknięty* (ps-i-domknięty), jeżeli $iCl(A) = A$. Zbiór wszystkich ps-i-domkniętych zbiorów wyznaczonych przez daną infra-topologię τ_{iW} na W będziemy określać jako $pc\tau_{iW}$.

Rzecz jasna dla każdego $A \subseteq W$ zachodzi $iCl(A) \in pc\tau_{iW}$. Załóżmy teraz, że $A, B \in pc\tau_{iW}$. Widzimy, że $iCl(A \cup B) = iCl(A) \cup iCl(B) = A \cup B$, zatem skończona suma zbiorów ps-i-domkniętych jest również ps-i-domknięta. Zauważmy, że zbiór $\{d\}$ w Przykładzie 5.17 należy do $pc\tau_{iW}$.

5.2. **Modele infra-topologiczne.**

5.2.1. *System logiczny.* W tym podrozdziale wykorzystamy koncepcję **GTf**-struktur, przedstawioną uprzednio w kontekście przestrzeni Császára. Zdefiniujemy zatem modele wyposażone w uogólnioną infra-topologię, czyli taką, w której uniwersum nie musi być zbiorem i-otwartym. Zarazem przyjmiemy, że każdy punkt nie należący do żadnego zbioru i-otwartego jest powiązany z pewnym punktem należącym do $\bigcup \tau_{iW}$ (zauważmy, że $\bigcup \tau_{iW}$ nie musi należeć do τ_{iW}).

Pozostawiamy ten sam język, z którym pracowaliśmy poprzednio: z operatorami i spójnikami $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bot$, $\neg$, $\Box$ oraz $\blacksquare$. Te same będą również oznaczenia aksjomatów i reguł.

Nasz system logiczny **gITLog** definiujemy jako poniższy zbiór aksjomatów i reguł: **CPC** $\cup \{C, M, T, 4, RE, RE_{\blacksquare}, MP\}$. Nie mamy tu reguły konieczności i dlatego nie identyfikujemy $C \wedge M$ (tj. $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$) z dobrze znanym aksjomatem K, rozumianym jako $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$.

5.2.2. *Pojęcie modelu.* W niniejszym podrozdziale zdefiniujemy klasę uogólnionych modeli infra-topologicznych.

Definicja 5.26. Uogólniony model infra-topologiczny (**gITop**-model) definiujemy jako piątkę $M = \langle W, \tau_{iW}, \mathbf{f}, \mathcal{N}, V\rangle$, gdzie τ_{iW} jest uogólnioną infra-topologią na W, V jest funkcją z PV w $P(W)$, zaś W składa się z dwóch odrębnych zbiorów Y_1 i Y_2:

(1) Jeżeli $w \in Y_1$, to przypisujemy temu światu pewien świat $v \in \bigcup \tau_{iW}$; przypisanie to określa funkcja $\mathbf{f}$ (zatem $\mathbf{f}$ to funkcja z Y_1 w $\bigcup \tau_{iW}$).
(2) Jeżeli $w \in Y_2$, to przypisujemy temu światu pewną rodzinę otoczeń, niekoniecznie związaną z $\bigcup \tau_{iW}$. Przyjmujemy, że $\mathcal{N}$ to funkcja z Y_2 into $P(P(W))$. Zatem $\mathcal{N}(w) = \mathcal{N}_w \subseteq P(P(W))$.

Wymuszanie formuł złożonych określamy poniżej (pomijamy operatory boolowskie, które są rozumiane standardowo):

Definicja 5.27. Jeśli $M = \langle W, \tau_{iW}, \mathbf{f}, \mathcal{N}, V\rangle$ to **gITop**-model, wówczas relację $\Vdash$ pomiędzy światami a formułami definiujemy jak poniżej:

(1) $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow$ istnieje $X \in \tau_{iW}$ taki że $w \in X$ i dla każdego $v \in X$, $v \Vdash \varphi$.
(2) $w \Vdash \blacksquare\varphi \Leftrightarrow$
   (a) Istnieje $X \in \tau_{iW}$ taki że $\mathbf{f}(w) \in X$ i dla każdego $v \in X$, $v \Vdash \varphi$; o ile $w \in Y_1$.
   (b) $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$; o ile $w \in Y_2$.

Łatwo udowodnić poniższe twierdzenie o przystosowaniu:

Twierdzenie 5.28. *Logika* **gITLog** *jest przystosowana do klasy wszystkich* **gITop**-*modeli, tzn. każdy aksjomat jest tautologią i każda reguła obowiązuje.*

Każdy nadzbiór **gITLog** nazwiemy *teorią* (ściślej, **gITLog**-teorią). Przy użyciu standardowej metody Henkina możemy każdą niesprzeczną teorię w rozszerzyć do maksymalnej teorii niesprzecznej u. Bez problemu da się też dowieść lematów analogicznych do Lem. 4.59 i Lem. 4.60. W tej sytuacji przechodzimy do modelu kanonicznego.

Definicja 5.29. Kanoniczny uogólniony model infra-topologiczny definiujemy jako piątkę $\langle W, \tau_{iW}, \mathbf{f}, \mathcal{N}, V\rangle$, gdzie:

(1) W jest kolekcją wszystkich niesprzecznych **gITLog**-teorii.
(2) τ_{iW} to uogólniona infra-topologia na W określona jako kolekcja tych wszystkich podzbiorów W, które można zapisać jako $\widehat{\Box\varphi}$, tj. $\{z \in W; \Box\varphi \in z\}$ (dla pewnej φ).
(3) Y_1 to zbiór wszystkich takich teorii z W, dla których istnieje taki $u \in \bigcup \tau_{iW}$, że dla każdej formuły φ mamy: $\Box\varphi \in u \Leftrightarrow \blacksquare\varphi \in w$.
(4) $Y_2 = W \setminus Y_1$.
(5) $\mathbf{f}$ to funkcja z Y_1 w $\bigcup \tau_{iW}$ taka, że $\mathbf{f}(w) = u$, gdzie u jest jak w (3).
(6) $\mathcal{N}$ to funkcja z Y_2 w $P(P(W))$ zdefiniowana tak: $\mathcal{N}_w = \{\widehat{\varphi}; \blacksquare\varphi \in w\}$.
(7) V to funkcja z PV w $P(W)$ taka, że dla każdego $q \in PV$, $V(q) = \{w \in W; q \in W\}$.

Naturalnie musimy udowodnić następujący lemat:

Lemat 5.30. *Uogólniony kanoniczny model infra-topologiczny jest rzeczywiście* **gI-Top**-*modelem.*

Dowód. Musimy pokazać, że τ_{iW} to uogólniona infra-topologia na W. Po pierwsze, $\emptyset$ można zapisać jako $\widehat{\Box\bot}$. Załóżmy teraz, że $A, B \in \tau_{iW}$ i rozważmy $A \cap B$. Oczywiście $A = \widehat{\Box\varphi}$ dla pewnej φ, zaś $B = \widehat{\Box\psi}$ dla pewnej ψ. Wtedy $A \cap B = \{z \in W; \Box\varphi \in z \text{ oraz } \Box\psi \in z\}$. Wówczas korzystamy z aksjomatów C i M, by powiedzieć, że $A \cap B = \{z \in W; \Box(\varphi \wedge \psi) \in z\}$. □

Dochodzimy do kluczowego lematu:

Lemat 5.31. *W kanonicznym* **gITop**-*modelu, dla każdego γ i dla każdej maksymalnej, niesprzecznej teorii w, mamy:*
$w \Vdash \gamma \Leftrightarrow \gamma \in w$.

Dowód. Dowód prowadzony jest niemal identycznie jak w przypadku **GTf**-modeli. Niemal, bo występują kosmetyczne różnice, a właściwie jedna: taka, że obecnie zbiorami otwartymi nie są dowolne sumy zbiorów postaci $\widehat{\Box\varphi}$, ale tylko zbiory takiej właśnie postaci. Nasza topologia jest istotnie infra: jeżeli dodamy do siebie dwa zbiory do niej należące, np. $\widehat{\Box\alpha}$ i $\widehat{\Box\beta}$, to niekoniecznie otrzymamy zbiór postaci $\widehat{\Box\delta}$ dla jakiejś δ. W szczególności taką δ nie musi być $\Box(\varphi \vee \psi)$ (nie mamy przecież aksjomatu postaci $\Box(\varphi \vee \psi) \to \Box\varphi \vee \Box\psi$).

W każdym razie owa różnica w gruncie rzeczy wręcz upraszcza kroki dowodowe. □

W znany sposób dowodzimy teraz poniższego twierdzenia o pełności:

Twierdzenie 5.32. *Logika* **gITLog** *jest (silnie) pełna względem klasy wszystkich* **gITop**-*modeli.*

Załóżmy teraz, że nasz model został uproszczony: nie ma podziału na Y_1 i Y_2 (acz pozostała uogólniona infra-topologia τ_{iW}), nie ma też funkcji $\mathbf{f}$, a poza tym istnieje tylko jeden operator modalny $\Box$ (określony jak wcześniej). Łatwo teraz pokazać, że klasa taka wyznacza logikę **CMT4**. Załóżmy dodatkowo, że W jest i-otwarty: w tym wypadku prawdziwa staje się reguła konieczności (lub, równoważnie, aksjomat

N). W takim razie mamy już do czynienia z logiką **S4** . Oczywiście wiadomo, że **S4** jest pełna względem węższej klasy modeli, mianowicie modeli topologicznych. Jest też np. (wynik Kremera z [79]) pełna (silnie) względem klasy wszystkich w sobie gęstych przestrzeni metrycznych.

5.3. **Uwagi końcowe.** Wartościowe byłoby zapewne zbadanie pojęć takich jak spójność i gęstość (tudzież nigdziegęstość) w kontekście zbiorów ps-infra-otwartych i i-poprawnych. Jeżeli mowa o spójności, to pewne próby tego rodzaju podjęte zostały w [19] (ale we *frameworku* struktur minimalnych, nieco ogólniejszych od naszych). Co do gęstości, to można wyobrazić sobie definicje oparte na poniższym schemacie: zbiór A jest ps-gęsty (resp. i-gęsty) w X, jeżeli ma niepusty przekrój z każdym niepustym, ps-infra-otwartym (resp. i-poprawnym) podzbiorem X. Problem w tym, że w odniesieniu do zbiorów i-poprawnych taka definicja, przyjęta bez żadnych uściśleń, nie byłaby użyteczna: wiemy bowiem, że każdy singleton jest i-poprawny, zatem nasz zbiór gęsty musiałby niepusto kroić się z każdym singletonem. W efekcie istniałby tylko jeden taki zbiór, mianowicie uniwersum W. W takim razie należałoby raczej żądać przekroju z każdym niepustym zbiorem i-poprawnym mocy większej niż 1 lub też (co w ogólności nie musi być równoważne) z każdym niepustym zbiorem i-poprawnym o niepustym i-wnętrzu, tj. zbiorem ściśle i-poprawnym. Można też też te dwa warunki połączyć.

Z logicznego punktu widzenia, byłoby interesujące połączenie dwóch wspomnianych klas zbiorów (tj. ps-infra-i i i-poprawnych) z wymuszaniem konieczności w modelu. Rzecz jasna łatwo zdefiniować nowy operator, np. Δ, w sposób następujący: $w \Vdash \Delta\varphi \Leftrightarrow$ istnieje ps-i-otwarty (resp. i-poprawny) zbiór X taki, że $w \in X$ i dla każdego $v \in X$, $v \Vdash \varphi$. Nie jest jednak jasne, w jaki sposób wyróżnić owe klasy w modelu kanonicznym - tak, aby uzyskać pełną aksjomatyzację.

Podobnie jak w przypadku przestrzeni Császára, można zastanowić się nad logiczną charakteryzacją "konkretnych" przestrzeni infra-topologicznych, takich np. jak te wymienione w Przykładzie 5.2 (6) - (8) i (10).

6. Pewne fakty na temat $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur

6.1. Uogólnienia otwartości i domkniętości.

6.1.1. *Zbiory $\mathcal{F}$-otwarte.* We wstępie do rozdziału o logicznych zastosowaniach uogólnionych topologii wspomnieliśmy, że własności $\mathcal{F}$-wnętrza są słabe. Istotnie: nie można np. powiedzieć, że $\mathcal{F}Int(A) \subseteq A$. Wystarczy tu przedstawić ogólny szkic kontrprzykładu: może być to dowolna taka **GT**-przestrzeń, w której znajdziemy taki zbiór $A \in \mu$ oraz taki $w \in W \setminus \bigcup \mu$, że $A \in \mathcal{F}_w$. Wówczas $w \in \mathcal{F}Int(A)$, ale oczywiście $w \notin A$.

Fakt, że niekoniecznie $A \subseteq \mathcal{F}Int(A)$ jest mniej zaskakujący, bo możliwy także przy standardowo pojętym wnętrzu (również uogólnionym). Tym niemniej można znów zobrazować taką sytuację szkicem kontrprzykładu. Przypuśćmy, że $A \subseteq W \setminus \bigcup \mu$ oraz $w \in A$. Wtedy z pewnością $w \notin \mathcal{F}Int(A)$, bo nawet jeśli znajdziemy jakieś zbiory w $\mathcal{F}_w$, to nie będą one zawarte w A, gdyż muszą one należeć do μ (a więc zawierać się w $\bigcup \mu$), podczas gdy A w całości znajduje się poza $\bigcup \mu$. Można zresztą te wymagania osłabić. Wystarczy rozważyć następującą sytuację: $A \cap (W \setminus \bigcup \mu) \neq \emptyset$, $\bigcup \mu \nsubseteq A$, $w \in A \cap (W \setminus \bigcup \mu)$ i dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $G \cap A = \emptyset$.

Powyższe dywagacje uprawniają nas do wprowadzenia trzech pojęć symulujących pojęcie otwartości w kontekście $\mathcal{F}$:

Definicja 6.1. Niech $\langle W, \mu \rangle$ będzie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą oraz $A \subseteq W$. Mówimy, że A jest:

- $\mathcal{F}$-otwarty ($\mathcal{F}$o.) $\Leftrightarrow A = \mathcal{F}Int(A)$.
- d$\mathcal{F}$-otwarty (d$\mathcal{F}$o.) $\Leftrightarrow \mathcal{F}Int(A) \subseteq A$.
- u$\mathcal{F}$-otwarty (u$\mathcal{F}$o.) $\Leftrightarrow A \subseteq \mathcal{F}Int(A)$.

Chociaż własności $\mathcal{F}$-wnętrza są, ogólnie rzecz biorąc, słabe, to jednak nie znaczy to, że nie da się wyróżnić żadnych interesujących prawidłowości. Poniżej prezentujemy listę odpowiednich lematów. Wszystkie one odnoszą się domyślnie do $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktury $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$, dlatego też nie będziemy tego założenia za każdym razem powtarzać.

Lemat 6.2. *Załóżmy, że $A, B \subseteq W$ oraz $A \subseteq B$. Wówczas $\mathcal{F}Int(A) \subseteq \mathcal{F}Int(B)$.*

Dowód. Jeśli $v \in \mathcal{F}Int(A)$, to istnieje $G \in \mathcal{F}_v$ taki że $G \subseteq A \subseteq B$. □

Lemat 6.3. *Załóżmy, że $A \subseteq W$. Wtedy $Int(A) \subseteq \mathcal{F}Int(A)$. W szczególności, jeśli $A \in \mu$, to $A \subseteq \mathcal{F}Int(A)$.*

Dowód. Jeśli $Int(A) \neq \emptyset$ oraz $w \in Int(A)$, to istnieje taki $G \in \mu$, że $w \in G \subseteq A$. Skoro $w \in \bigcup \mu$, to $G \in \mathcal{F}_w$.

Jeśli $Int(A) = \emptyset$, to teza staje się oczywista. □

Lemat 6.4. *Jeżeli $A \subseteq W$, to $\mathcal{F}Int(A) \cap \bigcup \mu = Int(A)$.*

Dowód. ($\subseteq$) Jeśli $v \in \mathcal{F}Int(A) \cap \bigcup \mu$, to istnieje $G \in \mathcal{F}_v$ taki że $G \subseteq A$. Rzecz jasna, $v \in G$ (ponieważ $v \in \bigcup \mu$). A zatem $v \in Int(A)$.

($\supseteq$) Jeśli $v \in Int(A)$, to $v \in \mathcal{F}Int(A)$ (co wynika z Lematu 6.3). Ale $v \in Int(A)$, zatem $v \in \bigcup \mu$. Tak więc, $v \in \mathcal{F}Int(A) \cap \bigcup \mu$.

□

Lemat 6.5. *Jeśli $A \subseteq W$, to $\mathcal{F}Int(\mathcal{F}Int(A)) \cap \bigcup \mu \subseteq \mathcal{F}Int(A)$.*

Dowód. Załóżmy, że $v \in \mathcal{F}Int(\mathcal{F}Int(A)) \cap \bigcup \mu$. Wtedy istnieje $G \in \mathcal{F}_v$ taki że $G \subseteq \mathcal{F}Int(A)$. Zatem dla każdego $u \in G$ istnieje $H \in \mathcal{F}_u$ taki że $H \subseteq A$. W szczególności jest to prawdą dla v (bo $v \in \bigcup \mu \supseteq G$). Tak więc $v \in G$ oraz $v \in \mathcal{F}Int(A)$.

□

Lemat 6.6. *Załóżmy, że* $A \in \mu$. *Wtedy* $A^* \subseteq \mathcal{F}Int(A)$.

Dowód. Jeśli $w \in A^*$, to z definicji $A \in \mathcal{F}_w$. Zatem istnieje $G \in \mathcal{F}_w$, mianowicie $G = A$, taki że $G \subseteq A$. Stąd $w \in \mathcal{F}Int(A)$. □

Lemat 6.7. $\mathcal{F}Int(W) = W \Leftrightarrow$ *dla każdego* $w \in W, \mathcal{F}_w \neq \emptyset$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że istnieje $v \in W$ taki że $F_v = \emptyset$. Wtedy $v \notin \mathcal{F}Int(W)$. ($\Leftarrow$) Przyjmijmy, że $v \notin \mathcal{F}Int(W)$. Stąd dla każdego $G \in \mathcal{F}_v$, $G \nsubseteq W$. Oczywiście to jest możliwe tylko wtedy, gdy w $\mathcal{F}_v$ nie ma żadnych elementów. □

Lemat 6.8. $\mathcal{F}Int(\emptyset) = \emptyset \Leftrightarrow$ *dla każdego* $w \in W$, $\emptyset \notin \mathcal{F}_w$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że istnieje $v \in W$ taki że $\emptyset \in \mathcal{F}_v$. Wtedy $v \in \mathcal{F}Int(\emptyset)$. Sprzeczność.

($\Leftarrow$) Przypuśćmy, że $\mathcal{F}Int(\emptyset) \neq \emptyset$. Zatem musi istnieć przynajmniej jeden taki punkt $v \in W$ dla którego istnieje $G \in \mathcal{F}_v$ taki że $G \subseteq \emptyset$. W takim razie G musi być zbiorem pustym.

□

Dwa ostatnie lematy skłaniają nas w naturalny sposób do wyróńienia dwóch podklas $\mathcal{F}$-struktur: struktur *normalnych* (takich, że dla każdego $w \in W$, $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$) i struktur *zgodnych* (takich, że dla każdego $w \in W$, $\emptyset \notin \mathcal{F}_w$). Te ostatnie zostały już zresztą wspomniane w części czwartej.

Lemat 6.9. *Załóżmy, że dla pewnego określonego* $X \subseteq W$ *i dla każdego* $A \in \mu$ *zachodzi następująca zależność: jeżeli* $A \neq \emptyset$, *to* $A \nsubseteq X$. *Wtedy* $\mathcal{F}Int(X) = \emptyset$ *lub* $\mathcal{F}Int(X) \subseteq Z = \{z \in W; \emptyset \in \mathcal{F}_z\}$.

Dowód. Przyjmijmy, że $\mathcal{F}Int(X) \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{F}Int \nsubseteq Z$. Zatem istnieje $v \in \mathcal{F}Int(X)$ taki że $\emptyset \notin \mathcal{F}_v$. To znaczy, że F_v zawiera tylko zbiory niepuste. Założyliśmy wszelako, że nie ma żadnych niepustych (a zarazem otwartych) zbiorów zawartych w X. □

Zauważmy, że jeśli istnieje choć jeden zbiór $X \subseteq W$ taki że $\mathcal{F}Int(X) = \emptyset$, wtedy Z (określony jak wyżej) musi być pusty. Załóżmy bowiem, że tak nie jest. Jeżeli $z \in Z$, wtedy zawsze możemy rzec, iż istnieje $G \in F_z$, mianowicie $G = \emptyset$, taki że $G \subseteq X$. Ale wtedy $z \in \mathcal{F}Int(X)$.

Zbiory $\mathcal{F}$-otwarte nie tworzą uogólnionej topologii, niemniej można przedstawić pewne częściowe wyniki w tej materii:

Lemat 6.10. *Załóżmy, że* $J \neq \emptyset$ *oraz* $\{X_i\}_{i \in J}$ *jest rodziną podzbiorów* W. *Wtedy* $\bigcup_{i \in J} \mathcal{F}Int(X_i) \subseteq \mathcal{F}Int(\bigcup_{i \in J} X_i)$. *Jeśli każdy* X_i *jest dodatkowo* $u\mathcal{F}o.$, *wtedy* $\bigcup_{i \in J} X_i \subseteq \mathcal{F}Int(\bigcup_{i \in J} X_i)$.

Dowód. Niech $v \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{F}Int(X_i)$. Zatem, istnieje $k \in J$ taki że $v \in \mathcal{F}Int(X_k)$. Czyli istnieje taki $G \in \mathcal{F}_v$, że $G \subseteq X_k$. Ale wtedy $G \subseteq X_k \subseteq \bigcup_{i \in J} X_i$. Możemy więc powiedzieć, iż $v \in \mathcal{F}Int(\bigcup_{i \in J} X_i)$. □

Zauważmy, że łatwo możemy wyobrazić sobie następującą sytuację: istnieje taki $v \in W$, że dla każdego $G \in \mathcal{F}_v$ i dla każdego $i \in J$, $G \nsubseteq \mathcal{F}Int(X_i)$, ale zarazem istnieje też $H \in \mathcal{F}_v$ taki że $H \subseteq \bigcup_{i \in J} \mathcal{F}Int(X_i)$. Zatem $v \in \mathcal{F}Int(\bigcup_{i \in J} X_i)$, lecz $v \notin \bigcup_{i \in J} \mathcal{F}Int(X_i)$. Spójrzmy zresztą na poniższy przykład:

Przykład 6.11. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą, w której μ jest standardową (a więc i uogólnioną) topologią, ale ograniczoną do kuli $K[(0,0), 10]$, zaś $W = K \cup \{v\}$, gdzie v to dowolny punkt z $\mathbb{R}^2$, który nie należy do K.

Zbiory otwarte są sumami kul otwartych zawierających się w K, i.e $K = \bigcup \mu$. Weźmy teraz $K_1[(0,0), 2]$, $K_2[(2,0), 2]$ i załóżmy, że $\mathcal{F}_v$ zawiera tylko jeden zbiór, mianowicie otwarty kwadrat oparty na współrzędnych $(-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1)$.

Niewątpliwie zawiera się on w $K_1 \cup K_2$ (a zatem i w sumie ich $\mathcal{F}$-wnętrz, bo kule te są otwarte), lecz nie zawiera się ani w K_1, ani w K_2. Zauważmy przy tym, że K_1 i K_2 są też $\mathcal{F}Int$-otwarte: wynika to z faktu, że zawierają się w μ, a jedyny punkt w $W \setminus \bigcup \mu$ to v.

Drugi lemat dotyczy przekrojów $\mathcal{F}$-wnętrz.

Lemat 6.12. *Załóżmy, że $J \neq \emptyset$ oraz $\{X_i\}_{i \in J}$ to rodzina podzbiorów W_μ. Wtedy $\mathcal{F}Int(\bigcap_{i \in J} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in J} \mathcal{F}Int(X_i)$. Jeśli każdy X_i jest dodatkowo d$\mathcal{F}$o., to $\mathcal{F}Int(\bigcap_{i \in J} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in J} X_i$.*

Dowód. Dowód przebiega podobnie do dowodu poprzedniego twierdzenia. Można też łatwo znaleźć kontrprzykład dla przeciwnego zawierania. □

Lemat 6.13. *Załóżmy, że $A \subseteq \mathcal{F}Int(A) \subseteq \bigcup \mu$. Wtedy $A \in \mu$.*

Dowód. Dla każdego $v \in A$ istnieje $G \in \mathcal{F}_v$ taki że $G \subseteq A$. Rzecz jasna, $G \in \mu$. Zarazem jednak $v \in \bigcup \mu$, więc $v \in G$ (co wynika z samej definicji $\mathcal{F}$). To znaczy, że dla każdeog $v \in A$, $v \in Int(A)$. Stąd $A \subseteq Int(A)$, czyli A jest otwarty, tj. $A \in \mu$. □

Jak powiedzieliśmy wcześniej, zbiory $\mathcal{F}$-otwarte nie posiadają wszystkich cech zbiorów otwartych, nawet w szerokim sensie Császára. Tym niemniej, następne twierdzenie jawi się jako ciekawe i użyteczne. W istocie zresztą *będzie* ono później przydatne.

Twierdzenie 6.14. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą oraz $w \in W$. Wówczas $\mathcal{F}_w \neq \emptyset \Leftrightarrow$ istnieje $\mathcal{F}$o. zbiór $G \subseteq W$ taki że $w \in G$.*

Dowód. $(\Rightarrow)$

Ponieważ $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$, to istnieje przynajmniej jeden $A \in \mathcal{F}_w$. Z natury rzeczy, $w \in \mathcal{F}Int(A)$. Jeżeli $A = \mathcal{F}Int(A)$, to dowód kończy się w tym miejscu. Jeżeli nie, to znaczy, że $\mathcal{F}Int(A) \nsubseteq A$. Zdefiniujmy teraz G jako $A \cup \mathcal{F}Int(A)$. Pokazujemy, że G jest $\mathcal{F}$-otwarty, tzn., że $\mathcal{F}Int(G) = G$.

$(\subseteq)$ Niech $v \in \mathcal{F}Int(G)$. Zatem $v \in \mathcal{F}Int(A \cup \mathcal{F}Int(A))$. Istnieje więc $U \in \mathcal{F}_v$ taki że $U \subseteq A \cup \mathcal{F}Int(A)$. W istocie oznacza to, że $U \subseteq A$ (ponieważ $U \subseteq \bigcup \mu$ oraz $\mathcal{F}Int(A) \cap \bigcup \mu = Int(A) = A$). Stąd $v \in \mathcal{F}Int(A)$. Z tego wnosimy, że $v \in G$.

$(\supseteq)$ Niech $v \in G$. Zatem $v \in A$ lub $v \in \mathcal{F}Int(A)$. Jeśli $v \in A$, to $A \in \mathcal{F}_v$ (ponieważ $A \in \mu$). Zatem $v \in \mathcal{F}Int(G)$. Jeżeli $v \in \mathcal{F}Int(A)$, to istnieje $U \in \mathcal{F}_v$ taki że $U \subseteq A \subseteq G$. Zatem $v \in \mathcal{F}Int(G)$.

$(\Leftarrow)$

Załóżmy, że $G \subseteq W$ jest $\mathcal{F}o.$, $w \in G$ oraz $\mathcal{F}_w = \emptyset$. Oczywiście $\mathcal{F}Int(G) = G$, więc $w \in \mathcal{F}Int(G)$. Zatem istnieje taki $H \in \mathcal{F}_w$, że $H \subseteq G$. Sprzeczność.

□

Zauważmy, że w przypadku metaimplikacji $\Leftarrow$ wystarczy przyjąć, że G jest $u\mathcal{F}$o.

6.1.2. *$\mathcal{F}$-domknięcia i zbiory $\mathcal{F}$-domknięte.* Każda sensowna definicja wnętrza (czy też otwartości) powinna być związana z dualną do niej definicją domknięcia (i domkniętości). Tak jest również w przypadku **GT**$\mathcal{F}$-struktur.

Definicja 6.15. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą oraz $w \in W$. Załóżmy, że $A \subseteq W$. Powiemy, że $w \in \mathcal{F}Cl(A) \Leftrightarrow$ dla każdego $G \in \mathcal{F}_w, G \cap A \neq \emptyset$.

Teraz możemy zdefiniować zbiory $\mathcal{F}$-domknięte:

Definicja 6.16. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą i niech $A \subseteq W$. Powiemy, że:

- A jest $\mathcal{F}$-domknięty ($\mathcal{F}$c.) $\Leftrightarrow \mathcal{F}Cl(A) = A$.
- d$\mathcal{F}$-domknięty (d$\mathcal{F}$c.) $\Leftrightarrow \mathcal{F}Cl(A) \subseteq A$

- u$\mathcal{F}$-domknięty (u$\mathcal{F}$c.) $\Leftrightarrow A \subseteq \mathcal{F}Cl(A)$

Ta definicja gwarantuje nam oczekiwany dualizm:

Twierdzenie 6.17. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą i niech $A \subseteq W$ będzie $\mathcal{F}$-otwarty. Wtedy $-A$ (tj. $W \setminus A$) jest $\mathcal{F}$-domknięty.*

Dowód. Z założenia $\mathcal{F}Int(A) = \{z \in W;$ istnieje taki $G \in \mathcal{F}_z$ że $G \subseteq A\} = A$. Rozważmy $-A = \{z \in W;$ for each $G \in \mathcal{F}_z, G \nsubseteq A\}$. Pokażemy teraz, że $\mathcal{F}Cl(-A) = -A$.

($\subseteq$) Przyjmijmy, że $w \in \mathcal{F}Cl(-A)$. Zatem dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $G \cap -A \neq \emptyset$. Tak więc $G \nsubseteq A$ i dlatego $w \in -A$.

($\supseteq$) Załóżmy, że $w \in -A$ oraz, że istnieje $H \in \mathcal{F}_w$ taki że $H \cap -A = \emptyset$. To znaczy, że $H \subseteq A$. Ale wtedy $w \in \mathcal{F}Int(A) = A$, co daje nam sprzeczność. □

Własności $\mathcal{F}$-domknięć, analogicznie do własności $\mathcal{F}$-wnętrz, są dość słabe. Dla przykładu, nie musi być tak, że $A \subseteq \mathcal{F}Cl(A)$. Łatwo można zbudować kontrprzykład obrazujący następującą sytuację: $A \subseteq W$, $A \cap (W \setminus \bigcup \mu) \neq \emptyset$, $w \in A \cap (W \setminus \bigcup \mu)$ i istnieje $G \in \mathcal{F}_w$ taki że $G \cap A = \emptyset$.

Jest też oczywiście możliwe, że $\mathcal{F}Cl(A) \nsubseteq A$. Wystarczy zbudować strukturę z takim światem w, że dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $G \cap A \neq \emptyset$ ale jednocześnie $w \notin A$ (można założyć, że $w \in W \setminus \bigcup \mu$ oraz $A \subseteq \bigcup \mu$).

Poniżej prezentujemy proste lematy, w większości będące odpowiednikami lematów 6.2 - 6.13 dla $\mathcal{F}$-wnętrz. Znów zakładamy, że w każdym przypadku pracujemy ze strukturą $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$.

Lemat 6.18. $\mathcal{F}Cl(\emptyset) = \emptyset \Leftrightarrow$ *dla każdego* $z \in W, \mathcal{F}_z \neq \emptyset$

Dowód. Zauważmy wpierw, że z definicji $\mathcal{F}Cl(\emptyset) = \{z \in W; G \cap \emptyset \neq \emptyset$ dla każdego $G \in \mathcal{F}_z\}$.

($\Rightarrow$) Jeżeli założymy, że istnieje $z \in W$ taki, że $\mathcal{F}_z = \emptyset$, to $z \in \mathcal{F}Cl(\emptyset)$ (w sposób trywialny, jako że w $\mathcal{F}_z$ nie ma żadnych zbiorów), ale wtedy $\mathcal{F}Cl(\emptyset) \neq \emptyset$. Sprzeczność.

($\Leftarrow$) Jeżeli $\mathcal{F}Cl(\emptyset)$ nie jest pusty, to możemy rozważyć element $z \in \mathcal{F}Cl(\emptyset)$. Z założenia $\mathcal{F}_z \neq \emptyset$ (zatem istnieje pewien $G \in \mathcal{F}_z$). Wynika z tego, iż $\emptyset$ kroi się niepusto z G. To oczywiście niemożliwe.

□

Lemat 6.19. $\mathcal{F}Cl(W) = W \Leftrightarrow$ *dla każdego* $z \in W, \emptyset \notin \mathcal{F}_z$.

Dowód. Z definicji $\mathcal{F}Cl(W) = \{z \in W; G \cap W \neq \emptyset$ dla każdego $G \in \mathcal{F}_z\}$.

($\Rightarrow$) Jeżeli $\mathcal{F}Cl(W) = W$, to nie może istnieć taki $z \in W$, że $\emptyset \in \mathcal{F}_z$. Znaczyłoby to bowiem, że $\emptyset \cap W \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Jeżeli istnieje $z \in W$ taki że $\emptyset \in \mathcal{F}_z$, to oczywiście $\emptyset \cap W = \emptyset$. Zatem $z \notin \mathcal{F}Cl(W)$. □

Lemat 6.20. *Załóżmy, że $J \neq \emptyset$ oraz $\{X_i\}_{i \in J}$ jest rodziną podzbiorów W. Wtedy $\bigcup_{i \in J} \mathcal{F}Cl(X_i) \subseteq \mathcal{F}Cl(\bigcup_{i \in J} X_i)$. Jeśli dodatkowo każdy X_i jest u$\mathcal{F}$c., wówczas $\bigcup_{i \in J} X_i \subseteq \mathcal{F}Cl(\bigcup_{i \in J} X_i)$.*

Dowód. Niech $v \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{F}Cl(A)$. To znaczy, że istnieje $k \in J$ taki że $v \in \mathcal{F}Cl(X_k)$. Zatem dla każdego $G \in \mathcal{F}_v$, $G \cap X_k \neq \emptyset$. Rzecz jasna $X_k \subseteq \bigcup_{i \in J} X_i$. Tak więc $G \cap \bigcup_{i \in J} X_i \neq \emptyset$. Z tego powodu $v \in \mathcal{F}Cl(\bigcup_{i \in J} X_i)$. □

Podobnie jak w przypadku $\mathcal{F}$-wnętrz, łatwo możemy znaleźć kontrprzykład na przeciwne zawieranie. Następny lemat dotyczy przekrojów.

Przykład 6.21. Wróćmy do $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktury wykorzystanej w przykładzie 6.11, ale teraz załóżmy, że $\mathcal{F}_v$ zawiera dwa zbiory, mianowicie kule otwarte: $L_1[(-1,0),0.5]$ oraz $L_2[(3,0),0.5]$. Każdy z nich niepusto kroi się z $K_1 \cup K_2$ (w istocie są nawet zawarte w tej sumie), zatem $v \in \mathcal{F}Cl(K_1 \cup K_2)$. Z drugiej strony, $v \notin \mathcal{F}Cl(K_1)$ (ponieważ $L_2 \cap K_1 = \emptyset$) oraz $v \notin \mathcal{F}Cl(K_2)$ (gdyż $L_1 \cap K_2 = \emptyset$).

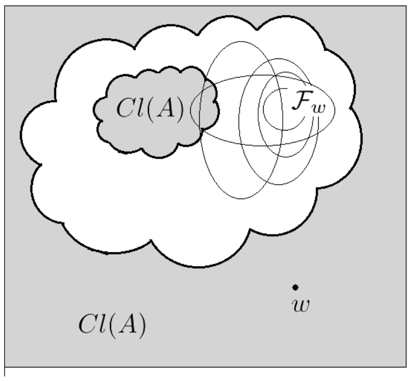
Lemat 6.22. *Załóżmy, że $J \neq \emptyset$ oraz $\{X_i\}_{i\in J}$ jest rodziną podzbiorów W_μ. Wtedy $\mathcal{F}Cl(\bigcap_{i\in J} X_i) \subseteq \bigcap_{i\in J} \mathcal{F}Cl(X_i)$. Jeżeli dodatkowo każdy X_i jest $d\mathcal{F}c.$, to $\mathcal{F}Cl(\bigcap_{i\in J} X_i) \subseteq \bigcap_{i\in J} X_i$.*

Dowód. Niech $v \in \mathcal{F}Cl(\bigcap_{i\in J} X_i)$. To znaczy, że dla każdego $G \in \mathcal{F}_v$, $G \cap \bigcap_{i\in J} X_i \neq \emptyset$. Zatem dla każdego $k \in J$, $G \cap X_k \neq \emptyset$. Zatem $v \in \mathcal{F}Cl(X_k)$. Ostatecznie, $v \in \bigcap_{i\in J} \mathcal{F}Cl(X_i)$. □

Tak jak i wcześniej, konwers nie jest ogólnie prawdziwy. Na koniec mamy lemat prosty, ale użyteczny:

Lemat 6.23. *Załóżmy, że $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ to $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktura, zaś $A \subseteq W$. Wtedy $\mathcal{F}Cl(A) \subseteq Cl(A)$.*

Dowód. Załóżmy, że $w \in \mathcal{F}Cl(A)$. Stąd dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $G \cap A \neq \emptyset$. Jeśli $w \in \bigcup \mu$, to konkluzja jest oczywista: każdy $G \in \mathcal{F}_w$ jest po prostu uogólnionym otoczeniem topologicznym w klasycznym sensie (czyli że w szczególności w należy do każdego otoczenia). Zatem $w \in Cl(A)$. Jeśli $w \in W \setminus \bigcup \mu$, to i tak nie ma żadnych otoczeń otwartych w. To czyni wniosek (trywialnie) prawdziwym. □



Rysunek 16. $w \notin \mathcal{F}Cl(A)$ ale $w \in Cl(A)$

Odwrotna zależność nie jest prawdziwa. Spójrzmy na schemat przedstawiony na rysunku. Rzecz jasna, $w \in W \setminus Int(W \setminus A) = Cl(A)$, ale jednocześnie w $\mathcal{F}_w$ są pewne zbiory, które mają pusty przekrój z A.

6.2. **Uogólnione ciągi.**

6.2.1. *Gnety i ciągi.* Wydaje się uprawnione, że za powszechnie przyjętą definicja topologii (rodziny zbiorów otwartych) stoją intuicje wywiedzione z analizy przedziałów otwartych (i domkniętych) na prostej rzeczywistej oraz z ich analogonów na płaszczyźnie. Te z kolei przedziały w naturalny sposób wiążą się z pojęciami ciągłości funkcji i zbieżności ciągów. Nawet jeśli w przypadku rozmaitych uogólnień pojęcia topologii te intuicje częściowo zawodzą, to jednak zrozumiałe jest, że autorzy wprowadzają odpowiedniki wspomnianych pojęć. Wydaje się, iż obszar ten (w szczególności $\mathbf{GT}$-przestrzenie Császára) jest jeszcze na tyle nowy, iż nie ma jednolitego standardu definicyjnego, a przynajmniej nie jest on kompletny.

W naszych rozważaniach na temat zbieżności ciągów uogólnionych będziemy bazować przede wszystkim na terminologii wprowadzonej w pracach [7], [118] i [102], która wydaje się być prostym przełożeniem klasycznych definicji na struktury uogólnione. Te definicje będą teraz z kolei przełożone na nasze struktury. Niektóre rezultaty (np. zbieżność ciągów stałych czy siła założeń w pewnych twierdzeniach) będą odmienne.

Pierwsza definicja dotyczy tzw. *gnetu* [40], tj. ciągu "podwójnie uogólnionego" (*generalized net*, przy czym należy wziąć tu pod uwagę fakt, że samo pojęcie *netu* jest tożsame z polskim ciągiem uogólnionym, stąd owa "podwójność", którą pozwoliliśmy sobie uwypuklić). W ślad za [7] przyjmujemy, na co warto zwrócić uwagę, że dziedziną takiego ciągu jest zbiór częściowo uporządkowany (a niekoniecznie skierowany).

Definicja 6.24. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą, zaś $(P, \geqslant)$ zbiorem częściowo uporządkowanym (*posetem*). *Podwójnie uogólnionym ciągiem* (gnetem) w W nazwiemy dowolną funkcję $f : P \to W$. Wartość tej funkcji dla elementu $\lambda \in P$ oznaczymy jako f_λ. Cały zbiór wyrazów gnetu oznaczamy jako (f_λ).

Bazując na pojęciu ciągu uogólnionego możemy wprowadzić jeszcze dwa bardziej szczegółowe terminy:

Definicja 6.25. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą, zaś $(P, \geqslant)$ będzie posetem. Powiemy, że gnet (f_λ), $f : P \to W$ jest *netem*, jeżeli P jest zbiorem skierowanym, tj. dla dowolnych dwóch elementów $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ istnieje $\lambda_3 \in P$ taki że $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ oraz $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Jeśli $P = \mathbb{N}$, to wówczas (f_λ) nazywamy *ciągiem*.

Dodajmy, że Al-Ysaary w [149] zbadał zagadnienie zbieżności netów (i filtrów) w strukturach minimalnych.

Zdefiniujemy teraz zbieżność i inne potrzebne pojęcia:

Definicja 6.26. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą, zaś (f_λ) gnetem w W. Powiemy, że:

- (f_λ) jest *ostatecznie* w $U \subseteq W \Leftrightarrow$ istnieje $\lambda_0 \in P$ taki że dla każdego $\lambda \geqslant \lambda_0$, $f_\lambda \in U$.
- (f_λ) *zbiega* do $w \in W$ (i.e. $(f_\lambda) \to w$) $\Leftrightarrow$ dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, f_λ jest ostatecznie w G. W tym przypadku powiemy, że w jest granicą gnetu (f_λ). Powiemy, że (f_λ) jest *zbieżny*, jeżeli istnieje $v \in W$ taki że $(f_\lambda) \to v$.

Zbieżność opisaną wyżej będziemy określać niekiedy *$\mathcal{F}$-zbieżnością* (tam, gdzie będzie to uzasadnione potrzebą jej wyróżnienia, czyli np. w następnym podrozdziale).

W naszym środowisku (inaczej niż w [7]) stały gnet nie musi być zbieżny. Poniżej lemat i twierdzenie, które charakteryzują zbieżność takich gnetów:

Lemat 6.27. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą, zaś $(f_\lambda) = (w)$ stałym gnetem w W. Wówczas (w) jest zbieżny $\Leftrightarrow (w) \to w$.*

Dowód. $(\Leftarrow)$ Oczywiste.

$(\Rightarrow)$ Załóżmy, że istnieje $v \in W, v \neq w$ taki że $(w) \to v$, ale $(w) \not\to w$. Zatem dla dowolnego $G \in \mathcal{F}_v$, $w \in G$ (przypomnijmy, że mowa o *stałym* gnecie), ale jednocześnie istnieje $H \in \mathcal{F}_w$ taki że $w \notin H$. Jeżeli jednak w jest w każdym otwartym otoczeniu v, to w musi być w $\bigcup \mu$. Wtedy dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $w \in G$, zatem H nie może istnieć. □

[40] Nazwa ta w języku polskim jawi się jako trochę niefortunna, ale jej niewątpliwą zaletą jest krótkość, podobnie zresztą jak w przypadku terminu *poset*, którego również będziemy używać.

Twierdzenie 6.28. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą, zaś $(f_\lambda) = (w)$ stałym gnetem w W. Wówczas (f_λ) jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $w \in \bigcup \mu$ lub $\mathcal{F}_w = \emptyset$.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że (f_λ) nie jest zbieżny. Z poprzedniego lematu wynika więc, że $(w) \nrightarrow w$. Istnieje zatem $G \in \mathcal{F}_w$ taki że $w \notin G$. Mamy teraz dwie możliwości. Jeśli $w \in \bigcup \mu$, to $w \in G$, co daje nam sprzeczność. Jeśli z kolei $\mathcal{F}_w = \emptyset$ (co w szczególności oznacza, że $w \in W \setminus \bigcup \mu$), wtenczas $w \notin G \subseteq \bigcup \mu$.

($\Rightarrow$) Przyjmujemy teraz, że (w) jest zbieżny. W szczególności znaczy to, że $(w) \to w$. Załóżmy, że $w \notin \bigcup \mu$ oraz $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$. Wtedy jednak dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $w \notin G$. Zatem $(f_\lambda) = (w)$ nie jest ostatecznie w G, co daje nam sprzeczność z założeniem o zbieżności. □

Jeżeli chodzi o jednoznaczność granicy stałego gnetu, to zachodzi ona dla pewnej podklasy naszych struktur, określonej *per analogiam* do klasy T_1 dla uogólnionych topologii.

Definicja 6.29. Powiemy, że **GT**$\mathcal{F}$-struktura $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest typu $\mathcal{F}T_1 \Leftrightarrow$ dla każdych dwóch w, v, takich że $w \neq v$, istnieją: $G \in \mathcal{F}_w$ dla którego $v \notin G$; oraz $H \in \mathcal{F}_v$ dla którego $w \notin H$.

Twierdzenie 6.30. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą. Wówczas granica każdego stałego i zbieżnego gnetu jest jednoznaczna $\Leftrightarrow$ $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest typu $\mathcal{F}T_1$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że (f_λ) ma jednoznaczną granicę w. Zatem dla każdego $v \neq w$, $f_\lambda = (w) \nrightarrow v$. Istnieje więc $H \in \mathcal{F}_v$ dla którego $w \notin H$.

Co jednak, gdy dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$ mielibyśmy $v \in G$? Znaczyłoby to, że $(v) \to w$. Niewątpliwie jednak, $(v) \to v$, a granice są jednoznaczne, zatem $v = w$. Sprzeczność.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że nasza przestrzeń jest typu $\mathcal{F}T_1$. Niech $w \neq v$ oraz (w) będzie zbieżnym gnetem. Wtedy $(w) \to w$. Załóżmy, że równocześnie $(w) \to v$. Znaczy to, że dla każdego $G \in \mathcal{F}_v$, $w \in G$. Sprzeczność.

□

Kolejne twierdzenie jest w zasadzie zgodne z częścią $\Rightarrow$ Twierdzenia 13 w [7]. Należy jednak założyć, że nasz gnet (w) jest zbieżny.

Twierdzenie 6.31. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą. Załóżmy, że $w, v \in W$, $w \neq v$, (w) jest zbieżnym, stałym gnetem oraz f_λ jest dowolnym gnetem (in W). Wtedy:*

$[(f_\lambda) \to w \Rightarrow (f_\lambda) \to v] \Rightarrow [w \in \bigcap \mathcal{F}_v]$.

W następnym twierdzeniu nie musimy już zakładać zbieżności (w). Jest ono tożsame z częścią $\Leftarrow$ ze wspomnianego twierdzenia z [7].

Twierdzenie 6.32. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą. Załóżmy, że $w, v \in W$, $w \neq v$ oraz (f_λ) jest dowolnym gnetem w W. Wówczas:*

$[w \in \bigcap \mathcal{F}_v] \Rightarrow [(f_\lambda) \to w \Rightarrow (f_\lambda) \to v]$

Dowody tych twierdzeń pomijamy (są one adaptacją odpowiednich dowodów z [7] do naszych potrzeb). Warto natomiast zauważyć, że:

Lemat 6.33. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą, zaś (f_λ) będzie gnetem. Jeżeli $(f_\lambda) \to w \in W$, to $\emptyset \notin \mathcal{F}_w$.*

Dowód. Załóżmy, że $\emptyset \in \mathcal{F}_w$. Ze zbieżności wiemy, iż dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, zatem i dla $\emptyset$, istnieje $\lambda_0 \in P$ taka, że dla każdego $\lambda \geqslant \lambda_0$, $f_\lambda \in \emptyset$. To rzecz jasna niemożliwe. □

W odniesieniu do zależności pomiędzy $\mathcal{F}Cl(A)$ i gnetami możemy sformułować następujące twierdzenie (którego dowód wzorowany jest na Twierdzeniu 4.1 w [7]):

Twierdzenie 6.34. *Załóżmy, że $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą, $\emptyset \neq A \subseteq W$. Then:*
$w \in \mathcal{F}Cl(A) \Leftrightarrow$ *istnieje gnet* $(f_\lambda) \in A$ *taki że* $(f_\lambda) \to w$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $w \in \mathcal{F}Cl(A)$. Mamy dwie możliwości. Pierwsza jest taka, że, $\mathcal{F}_w = \emptyset$. Możemy wtedy założyć, iż $P = 2^W \setminus \{\emptyset\}$ oraz $C \geqslant D \Leftrightarrow C \subseteq D$. Definiujemy $f : P \to W$ tak, że $f(C) \in A$. Wtedy (f_λ) jest gnetem w A oraz $(f_\lambda) \to w$ (ponieważ w $\mathcal{F}_w$ nie ma innych zbiorów).

Druga możliwość to $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$. Tu zakładamy, że $P = \mathcal{F}_w$. Porządek $\geqslant$ definiujemy jak poprzednio. Z samego określenia $\mathcal{F}Cl(A)$ wynika, że dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, $G \cap A \neq \emptyset$. Przyjmijmy, że $f(G) \in G \cap A$ dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$. Wtedy (f_λ) jest gnetem w A oraz dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$ gnet ten jest ostatecznie w G, i.e. $(f_\lambda) \to w$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że mamy gnet (f_λ) w A taki że $(f_\lambda) \to w$. Zatem dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$, (f_λ) jest ostatecznie w G, co znaczy, że dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$ istnieje λ_0 taki że dla każdego $\lambda \geqslant \lambda_0$, $f_\lambda \in G$. Ale dla każdego λ, $f_\lambda \in A$. Stąd dla każdego $G \in \mathcal{F}_w$ mamy $G \cap A \neq \emptyset$. Zatem $w \in \mathcal{F}Cl(A)$. Co więcej, dzięki Lematowi 6.23 możemy powiedzieć $w \in Cl(A)$.

□

6.2.2. *$\mathcal{E}$-zbieżność.* Z Twierdzenia 6.14 wiemy już, że każdy punkt uniwersum W jest zawarty w pewnym otoczeniu $\mathcal{F}$-otwartym (o ile tylko $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$). To nasuwa myśl o drugim rozumieniu zbieżności.

Definicja 6.35. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą. Załóżmy, że $w \in W$. Definiujemy $\mathcal{E}_w$ jako zbiór wszystkich $\mathcal{F}$-otwartych zbiorów, do których należy w.

W odniesieniu do tego zbioru można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.36. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą taką, że $\mathcal{F}_w = \emptyset$ dla każdego $w \in W \setminus \bigcup \mu$. Wówczas dla każdego $v \in \bigcup \mu$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{E}_v$. Rezultat ten jest prawdziwy także dla każdego $v \in W \setminus \bigcup \mu$: wówczas $\mathcal{F}_v = \mathcal{E}_v = \emptyset$.*

Wykorzystajmy zbiory $\mathcal{E}_w$ do zredefiniowania pojęcia zbieżności:

Definicja 6.37. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą, zaś (f_λ) gnetem w W. Powiemy, że:

- (f_λ) *$\mathcal{E}$-zbiega* do $w \in W$ (i.e. $(f_\lambda) \to^{\mathcal{E}} w$) $\Leftrightarrow$ dla każdego $G \in \mathcal{E}_w$, f_λ jest ostatecznie w G. W tym przypadku powiemy, że w jest *$\mathcal{E}$-granicą* (f_λ). Mówimy, że (f_λ) jest *$\mathcal{E}$-zbieżny*, jeśli istnieje taki $v \in W$, że $(f_\lambda) \to^{\mathcal{E}} v$.

Zachodzą pewne różnice pomiędzy $\mathcal{F}$- i $\mathcal{E}$-zbieżnością. Podstawowa zasadza się na tym, że tym razem mamy już typowy rezultat dla gnetów stałych.

Lemat 6.38. *Każdy stały gnet w dowolnej* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturze $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest $\mathcal{E}$-zbieżny.*

Dowód. Rozważmy $(f_\lambda) = (w)$. Załóżmy, że dla każdego $v \in W$, $(w) \nrightarrow^{\mathcal{E}} v$. Tak więc dla każdego $v \in W$ istnieje taki $S \in \mathcal{E}_v$, że $w \notin S$. W szczególności jest tak dla $v = w$. Istnieje zatem $S \in \mathcal{E}_w$ taki że $w \notin S$. To jednak niemożliwe z samej definicji $\mathcal{E}_w$. □

Zgodnie z tym, czego moglibyśmy oczekiwać, zachodzi:

Lemat 6.39. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą, zaś $(f_\lambda) = (w)$ będzie stałym gnetem w W. Wówczas (w) jest $\mathcal{E}$-zbieżny $\Leftrightarrow$ $(w) \to^{\mathcal{E}} w$.*

Charakteryzacja jednoznaczności granicy gnetu stałego ponownie wymaga zdefiniowana specjalnej podklasy struktur:

Definicja 6.40. Powiemy, że **GT**$\mathcal{F}$-struktura $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest $\mathcal{E}T_1 \Leftrightarrow$ dla każdego $w \neq v$ istnieje $G \in \mathcal{E}_w$ taki że $v \notin G$ oraz $H \in \mathcal{E}_v$ taki że $w \notin H$.

Twierdzenie 6.41. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą. Wtedy $\mathcal{E}$-granica każdego stałego gnetu jest jednoznaczna $\Leftrightarrow$ $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest $\mathcal{E}T_1$.*

Dowód powyższego twierdzenia pominiemy jako zbliżony do dowodu Twierdzenia 6.30. Warto natomiast odnotować następującą zależność pomiedzy dwoma rodzajami zbieżności:

Twierdzenie 6.42. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą, zaś (f_λ) będzie gnetem (zakładamy, że $f : P \to W$). Jeżeli $(f_\lambda) \to w$, to $(f_\lambda) \to^{\mathcal{E}} w$.*

Dowód. Załóżmy, że $(f_\lambda) \nrightarrow^{\mathcal{E}} w$. Istnieje zatem zbiór $S \in \mathcal{E}_w$ taki, że dla każdego $\lambda \in P$ istnieje $\lambda_1 \geqslant \lambda$ dla którego $f_{\lambda_1} \notin S$.

Wiemy, że $S \neq \emptyset$ (bo $S \in \mathcal{E}_w$, zatem $w \in S$). Co więcej, S jest $\mathcal{F}$-o., zatem $w \in \mathcal{F}Int(S)$. Istnieje zatem $H \in \mathcal{F}_w$ taki że $H \subseteq S$. Jak założyliśmy, $(f_\lambda) \to w$, zatem istnieje $\lambda_0 \in P$ taka, że dla każdego $\lambda \geqslant \lambda_0$, $f_\lambda \in H \subseteq S$. Sprzeczność. $\square$

Konwers Twierdzenia 6.42 nie jest prawdziwy, co obrazuje poniższy kontrprzykład:

Przykład 6.43. Rozważmy następującą **GT**$\mathcal{F}$-strukturę: $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$, gdzie $W = \{w, v\}$, $\mu = \{\emptyset, \{w\}\}$ oraz $\mathcal{F}_v = \{\{w\}\}$. Wówczas zbiór $\{w, v\} = W$ jest $\mathcal{F}$-o. oraz jest jedynym elementem $\mathcal{E}_v$ (zauważmy, że $\mathcal{F}Int(\{v\}) = \emptyset$). Rozważmy teraz stały gnet $(f_\lambda) = (v)$ (powiązany z dowolnym P). Oczywiście $(v) \to^{\mathcal{E}} v$. Zauważmy jednak, że $(v) \nrightarrow v$, bowiem istnieje taki $G \in \mathcal{F}_v$, mianowicie $\{w\}$, że $v \notin G$.

Wróćmy do Twierdzenia 6.34. Czy można w nim zastąpić $\mathcal{F}$-zbieżność przez $\mathcal{E}$-zbieżność? Oczywiście jeżeli $w \in \mathcal{F}Cl(A)$, to łatwo możemy znaleźć $\mathcal{F}$-zbieżny gnet (jak to pokazano w Twierdzeniu 6.34), ten zaś będzie (z Lematu 6.42) $\mathcal{E}$-zbieżny. Druga meta-implikacja nie jest prawdziwa, co obrazuje poniższy kontrprzykład:

Przykład 6.44. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą taką, że $W = \{w, v, u\}$, $\mu = \{\emptyset, \{w\}\}$, $\mathcal{F}_v = \{\{w\}, \{u\}\}$, $\mathcal{F}_u = \emptyset$. Rzecz jasna, $\mathcal{F}_w = \{\{w\}\}$. Rozważmy $A = \{v\}$ i gnet stały (v). Naturalnie (v) jest gnetem w zbiorze A. Jest on $\mathcal{E}$-zbieżny (np. do v).

Zarazem jednak $v \notin \mathcal{F}Cl(A)$, albowiem istnieje $G = \{u\} \in \mathcal{F}_v$ taki, że $G \cap \{v\} = G \cap A = \{u\} \cap \{v\} = \emptyset$. W istocie $\mathcal{F}Cl(A) = \mathcal{F}Cl(\{v\}) = \{z \in W;$ for any $G \in \mathcal{F}_z, G \cap \{v\} \neq \emptyset\} = \{u\}$ (bo w $\mathcal{F}_u$ nie ma żadnych zbiorów).

6.2.3. *Zbiory $\mathcal{E}$-otwarte i ich topologia uogólniona.* Wprowadziliśmy $\mathcal{F}$-wnętrza i analogiczne do nich $\mathcal{F}$-domknięcia. Rozważaliśmy też zbiory $\mathcal{E}_w$, dla dowolnego $w \in W$. Można postawić pytanie: czy istnieje jakiś powód, dla którego uzasadnione byłoby przeniesienie pojęć otwartości i domkniętości na jeszcze wyższy poziom? Temat ten potraktujemy tu co prawda pobieżnie (albowiem naszym głównym celem jest przejscie do logiki), niemniej warto zasygnalizować pewną prawidłowość.

Definicja 6.45. Załóżmy, że $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ jest **GT**$\mathcal{F}$-strukturą oraz $A \subseteq W$. Powiemy, że:

- $w \in \mathcal{E}Int(A) \Leftrightarrow$ istnieje $S \in \mathcal{E}_w$ taki że $S \subseteq A$.
- $w \in \mathcal{E}Cl(A) \Leftrightarrow$ dla każdego $S \in \mathcal{E}_w$, $S \cap A \neq \emptyset$.

Zbiór A jest *$\mathcal{E}$-otwarty* ($\mathcal{E}$-o.) wtedy, gdy $\mathcal{E}Int(A) = A$, i jest *$\mathcal{E}$-domknięty* ($\mathcal{E}$-c.), jeżeli $\mathcal{E}Cl(A) = A$.

Okazuje się, że zachodzi:

Twierdzenie 6.46. *Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F}\rangle$ będzie* **GT**$\mathcal{F}$ *-strukturą, zaś $\mathcal{EO}$ kolekcją wszystkich zbiorów $\mathcal{E}$-otwartych zawartych w W. Wówczas $\mathcal{EO}$ jest uogólnioną topologią na W. Jeżeli struktura jest normalna, wtedy $\mathcal{EO}$ jest silna.*

Dowód. Pokażmy, że $\emptyset$ jest $\mathcal{E}$-otwarty: $\mathcal{E}Int(\emptyset) = \{z \in W;$ istnieje $S \in \mathcal{E}_w$ taki że $S \subseteq \emptyset\} = \emptyset$. Wynika to z faktu, że jedynym zbiorem zawartym w $\emptyset$ jest dokładnie zbiór pusty - ale dla każdego $S \in \mathcal{E}_w$, $w \in S$, zatem $S \neq \emptyset$.

Niech teraz $J \neq \emptyset$ i dla każdego $i \in J$, X_i będzie $\mathcal{E}$-o. Wtedy $\bigcup X_i$ też jest $\mathcal{E}$-o., tzn. $\mathcal{E}Int(\bigcup_{i\in J} X_i) = \bigcup X_i$. Gdyż:

($\subseteq$) Niech $w \in \mathcal{E}Int(\bigcup X_i)$. Istnieje zatem taki $S \in \mathcal{E}_w$, że $S \subseteq \bigcup_{i\in J} X_i$. Ale $w \in S$, więc $w \in \bigcup_{i\in J} X_i$.

($\supseteq$) Niech $w \in \bigcup_{i\in J} X_i$. Istnieje zatem X_k taki że $w \in X_k$. X_k jest $\mathcal{E}$-o., skąd $w \in \mathcal{E}Int(X_k)$. Mamy więc zbiór $S \in \mathcal{E}_w$ taki że $S \subseteq X_k \subseteq \bigcup_{i\in J} X_i$. Zatem $w \in \mathcal{E}Int(\bigcup_{i\in J} X_i)$.

Załóżmy teraz, że $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$ dla każdego $w \in W$. Wtedy $\mathcal{E}_w \neq \emptyset$. Zatem $\mathcal{E}Int(W) = \{z \in W;$ istnieje $S \in \mathcal{E}_w$ taki że $S \subseteq W\} = W$. □

Twierdzenie to pokazuje nam, że nawet jeżeli pracujemy z $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturą, która nie jest silna (zatem część punktów pozostaje poza topologią), ale jest normalna (co zdaje się być skromnym warunkiem), to i tak μ - poprzez $\mathcal{F}$ - wyznacza nam uogólnioną topologię obejmującą wszystkie punkty uniwersum. Można też pokazać, że zawsze $\mathcal{E}Int(\bigcap_{i\in J} X_i) \subseteq \bigcap X_i$ (przy czym zbiory indeksowane przez J nie muszą być $\mathcal{E}$-otwarte).

6.2.4. *Pojęcia ciągłości.* Przyjęliśmy już pewne definicje funkcji ciągłych, w szczególności $\mathcal{F}$-ciągłość (-otwartość). Wprowadźmy pewne specyficzne warianty tych dwóch ostatnich terminów:

Definicja 6.47. Niech $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu\rangle$ oraz $F_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau\rangle$ będą dwiema $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturami, zaś f funkcją z W_μ w W_τ. Powiemy, że f jest:

- $w\mathcal{F}w'$-ciągła $\Leftrightarrow \left[G' \in \mathcal{F}^\tau_{w'} \Rightarrow f^{-1}(G') \in \mathcal{F}^\mu_w\right]$ dla *pewnych* $w \in W_\mu$, $w' \in W_\tau$.
- $w\mathcal{F}w'$-otwarta $\Leftrightarrow [G \in \mathcal{F}^\mu_w \Rightarrow f(G) \in \mathcal{F}^\tau_{w'}]$ dla *pewnych* $w \in W_\mu$, $w' \in W_\tau$.

Choć pojęcia $w\mathcal{F}w'$-ciągłości i $w\mathcal{F}w'$-otwartości okażą się zbyt słabe do poprawnego zdefiniowania interesujących nas pojęć logicznych, zaś $\mathcal{F}$-ciągłość i $\mathcal{F}$-otwartość są ich naturalnymi uogólnieniami, to jednak można wpleść w nasz wywód dwa lematy, łączące owe terminy z najbardziej standardową (choć oczywiście uogólnioną) ciągłością i otwartością.

Lemat 6.48. *Przyjmijmy, że $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu\rangle$ oraz $F_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau\rangle$ to dwie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktury, zaś f będzie funkcją ciągłą z W_μ w W_τ. Załóżmy, że istnieje $v' \in W_\tau$ taki, że $f^{-1}(G') \neq \emptyset$ dla każdego $G' \in \mathcal{F}^\tau_{v'}$. Wtedy istnieją takie $w \in W_\mu$, $w' \in \bigcup \tau$, że f jest $w\mathcal{F}w'$-ciągła.*

Dowód. Rozważmy $G' \in \mathcal{F}^\tau_{v'}$. Z natury rzeczy $G' \in \tau$. Z założenia o ciągłości f mamy, że $f^{-1}(G') \in \mu$. Założyliśmy, że $f^{-1}(G') \neq \emptyset$, zatem istnieje pewien $v \in f^{-1}(G')$. Stąd $f^{-1}(G') \in \mathcal{F}^\mu_v$ (bo $v \in \bigcup_\mu$). Zatem rolę naszego w (z tezy lematu) pełnić może v, zaś jako w' przyjmujemy v'.

□

Lemat 6.49. *Przyjmijmy, że $F_1 = \langle W_\mu, \mu, \mathcal{F}^\mu\rangle$ oraz $F_2 = \langle W_\tau, \tau, \mathcal{F}^\tau\rangle$ będą dwiema $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-strukturami, zaś f funkcją otwartą z W_μ w W_τ. Załóżmy, że istnieje $v \in W_\mu$ taki, że $f(G) \neq \emptyset$ dla każdego $G \in \mathcal{F}^\mu_v$. Wówczas istnieją $w \in W_\mu$, $w' \in \bigcup \tau$ takie, że f jest $w\mathcal{F}w'$-otwarta.*

Dowód. Rozważmy $G \in \mathcal{F}^\mu_v$. Z definicji $G \in \mu$. Z założenia o otwartości f mamy, że $f(G) \in \tau$. Skoro $f(G) \neq \emptyset$, to możemy wziąć $v' \in f(G)$. Teraz $f(G) \in \mathcal{F}^\tau_{v'}$. Stąd możemy przyjąć, że rolę w (z tezy lematu) pełnić może v, zaś jako w' przyjmujemy v'. □

6.3. **Uwagi końcowe.** Badania nad **GT**$\mathcal{F}$-strukturami można oczywiście prowadzić dalej, w szczególności analizując zależność pomiędzy różnymi formami ciągłości i zbieżności. Naturalna byłaby modyfikacja wcześniejszych rozumowań przy założeniu, że pracujemy np. z funkcją $\mathbf{f}$ z części trzeciej. Istotne byłoby też uwypuklenie i wykorzystanie faktu, że mamy do czynienia z elementami uogólnionej topologii Császára (a więc domkniętej na sumy); na podobnej zasadzie należałoby zbadać wariant infra-topologiczny. Funkcja $\mathbf{f}$, jako szczególny przypadek $\mathcal{F}$, znacznie precyzuje "strukturę matematyczną" naszych przestrzeni. Jest ona, jak wiemy, oparta na założeniu, że światy z $W \setminus \bigcup \mu$ dziedziczą otoczenia po przypisanych sobie światach $\bigcup \mu$. Funkcja $\mathbf{f}$ określa właśnie to przypisanie.

To, co wydaje się (naszym zdaniem) intrygujące, to zarysowana w części czwartej wizja wykorzystania narzędzi z teorii zbiorów Pawlaka. Stosując górną i dolną aproksymację w odniesieniu do $\bigcup \mu$ (a więc wykorzystując $U_R(\bigcup \mu)$ i $L_R(\bigcup \mu)$) moglibyśmy - dla różnych relacji R - rozeznawać światy "być może" ("poniekąd") i "na pewno" będące w $\bigcup \mu$. To z kolei mogłoby być wiązane z ideą funkcji $\mathcal{F}$ lub funkcji $\mathbf{f}$, tzn. światy "poniekąd" będące w $\bigcup \mu$ miałyby tam swoje otoczenia: w jakiejś formie lub z jakimiś ograniczeniami. Na tym etapie to oczywiście tylko zarys ogólnego pomysłu.

7. Podsumowanie

Rozprawę, którą czytelnik kończy właśnie czytać, rozpoczął dość obszerny wstęp, w którym m.in. zapowiedzieliśmy i opisaliśmy to, co będą zawierać poszczególne części: w tej chwili już zresztą znane czytelnikowi. Byłoby więc bezprzedmiotowe powtarzanie tego rodzaju opisu, tyle że w trybie czasu przeszłego: że oto zaprezentowaliśmy struktury i modele następujących rodzajów, a wraz z nimi określone twierdzenia.

W iście telegraficznym skrócie powiemy jedynie, że praca nasza dotyczyła kolejno: normalnych, a następnie nie-normalnych modalnych logik intuicjonistycznych; uogólnionych topologii Császára oraz infra-topologii jako narzędzi semantycznych dla klasycznych logik modalnych (słabych); topologicznych własności pewnej klasy obiektów, mianowicie $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur. Po drodze poczyniliśmy także trzy dygresje dotyczące kolejno: logik probabilistycznych; nowych operacji na *double setach*; intuicjonistycznego wariantu zdaniowej logiki wiarygodności; oraz systemów subintuicjonistycznych.

W dalszych badaniach chcemy skoncentrować się zwłaszcza na drugim i czwartym z tych zagadnień. W szczególności chodzi o semantyki topologiczne (uogólnione) i otoczeniowe dla subintuicjonistycznych logik modalnych[41]. Planujemy także kontynuować badania nad zbiorami negocjacyjnymi (czyli *double setami* wyposażonymi w operacje $\odot$ i $\oplus$). Pewnym wyzwaniem byłoby zdefiniowanie oczekiwanego, końcowego rezultatu negocjacji prowadzonych przy użyciu tych zbiorów (a więc określenie pewnego zbioru końcowego) i zbudowanie algorytmu, który do takiego wyniku by prowadził. Całość mogłaby zostać zaimplementowana jako system informatyczny.

Naturalną kontynuacją trzeciej części rozprawy byłoby natomiast zbudowanie intuicjonistycznych wariantów logik nieznanych prawd, czyli (w praktyce) przyjrzenie się operatorowi $\circ$ pod kątem tego, która jego definicja byłaby najwłaściwsza.

Rozprawa nasza miała także na celu zapoznanie (wstępne) czytelnika z zagadnieniem struktur słabszych niż tradycyjna topologia; bądź osadzonych w innych uniwersach. Badania nad tego typu klasami nie zawsze prowadzone są w "centrum" czy też "głównym nurcie" matematycznego świata, czasami raczej na jego obrzeżach, ale być może właśnie dlatego zasługują one na lepsze poznanie i ocenę (w tym również krytyczną) ewentualnych perspektyw z nimi związanych.

Czytelnikowi, który dotarł z nami aż tutaj, serdecznie dziękujemy za uwagę. Odsyłamy go do bibliografii, która jest dość obszerna: z uwagi na to, że staraliśmy się każdą omawianą strukturę wesprzeć odpowiednim odwołaniem.

***

Z najlepszymi życzeniami,
Autor.

luty 2021.

[41]Jest to, jak się wydaje, *terra incognita*. W jakiś sposób świadczy o tym fakt, że terminy takie jak "subintuitionistic modal logic(s)" czy "modal subintuitionistic logic(s)" są prawie nieobecne w źródłach. W jednej z prac (zob. [28]) można znaleźć "multimodal subintuitionistic logic", acz prawdopodobnie w innym sensie niż ten, który by nas interesował.

Literatura

[1] N. A. Ahengar, J. K. Maitra, S. Chaturvedi, *μ-Binary Topological Spaces*, Journal of International Academy of Physical Sciences, vol. 23, no. 1 (2019).

[2] H. Ahmet, T. Mehmet, *Peritopological Spaces and Bisimulations*, Rep. Math. Logic, vol. 50 (2015), pp. 67-81, https://rml.tcs.uj.edu.pl/rml-50/5-hamal.pdf

[3] D. Andrijevic, *On b-open sets*, Math. Vesnik, vol. 48 (1996), 59 - 64.

[4] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986), 87-96.

[5] J. Avila, F. Molina, *Generalized weak structures*, Int. Math. Forum, 7 (2012), no. 52, 2589-2595, https://www.semanticscholar.org/paper/Generalized-Weak-Structures-Ávila-Molina/581a5f13d03e1d377d7ad6fb16d94ee1a84737c7.

[6] P. Balbiani, D. Galmiche, *About intuitionistic public announcement logic*, Advances in Modal Logic 2016: 97-116.

[7] R. Baskaran, *A study on the properties of generalized topology*, Diss. M.D.T. Hindu College, 2010, https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/20450

[8] S. Bayhan, D. Çoker, *Pairwise separation axioms in intuitionistic topological spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 34 (2005), 101-114.

[9] R. Baskaran, M. Murugalingam, D. Sivaraj, *Generalized nets in generalized topological spaces*, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2011, pp. 1-7, https://www.researchgate.net/publication/271079552_Generalized_nets_in_generalized_topological_spaces

[10] R. Baskaran, M. Murugalingam, D. Sivaraj *Sequential Convergence in Generalized Topological Spaces*, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, Vol. 3, Issue 1, 2011, https://www.researchgate.net/publication/271079415_Sequential_Convergence_in_Generalized_Topological_Spaces

[11] S. Boffa, *Sequences of refinements of rough sets: logical and algebraic aspects*, https://core.ac.uk/download/pdf/294904796.pdf.

[12] M. Božic, K. Došen, *Models for normal intuitionistic modal logics*, Studia Logica XLIII (1984).

[13] T. A. dos Santos Boza, H. de Araujo Feitosa, *Semantica relacional para a lógica proposicional do plausivel*, https://arxiv.org/pdf/1603.07606.pdf.

[14] H. Burillo, P. Bustince, *Vague sets are intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, no. 79, 1996, pp. 403-405.

[15] R. Carmel, *Studies on nano topological spaces*, Diss. Madurai Kamraj University 2013, https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/138694

[16] C. Carpintero, E. Rosas, M. Salas-Brown, J. Sanabria, *Minimal open sets on generalized topological space*, Proyecciones Journal of Mathematics, Vol. 36, No. 4, pp. 739-751, Dec. 2017. https://scielo.conicyt.cl/pdf/proy/v36n4/0716-0917-proy-36-04-00739.pdf

[17] G. Cattaneo, D. Ciucci, *Basic intuitionistic principles in fuzzy set theories and its extensions (a terminological debate on Atanassov IFS)*, Fuzzy Sets and Systems, December 2006, https://boa.unimib.it/retrieve/handle/10281/1424/720/fss157.pdf.

[18] S. Chakrabarti, H. Dasgupta, *Infra-topological space and its applications*, Review Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, vol. 17, Jan. 2009.

[19] S. Chakrabarti, H. Dasgupta, *Touching sets and its applications*, International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 8, 2014, no. 52, 2577 - 2589. http://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2014/ijma-49-52-2014/chakrabartiIJMA49-52-2014.pdf

[20] S. Chandrasekar, *On micro topological spaces*, Journal of New Theory, no. 26 (2019), pp. 23-31 https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/615704

[21] G. Choquet, *Convergences*, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., 23 (1947 - 1948), 57 - 112.

[22] D. Ciucci, *Orthopairs: a simple and widely used way to model uncertainty*, Fundamenta Informaticae 108(3): 287-304, https://boa.unimib.it/retrieve/handle/10281/25265/32626/09-RST-SITO.pdf.

[23] D. Çoker, *A note on intuitionistic sets and intuitionistic points*, Tr. J. of Mathematics, 20 (1996), pp. 343-351.

[24] D. Çoker, *An introduction to intuitionistic topological spaces*, BUSEFAL 81 (2000) 51-56.

[25] D. Çoker, *An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 88(1), 1997, 81-89.

[26] M. J. Collinson, B. P. Hilken, D. E. Rydeheard, *An adjoint construction for topological models of intuitionistic modal logic. Extended abstract*, http://sierra.nmsu.edu/morandi/old%20files/TbilisiConference/Collinson.pdf

[27] G. Corsi, *Weak logics with strict implication*, Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematic, 33:389-406, 1987.

[28] C. Cotrini, Y. Gurevich, O. Lahav, A. Melentyev, *Primal infon logic with conjunctions as sets*, https://www.cs.tau.ac.il/~orilahav/papers/spilTCS6.pdf.

[29] A. Császár, *Foundation of General Topology*, MacMillan Company, New York,1963.

[30] Á. Császár, *Generalized topology, generalized continuity*, Acta Math. Hungar., 96(4) (2002), 351 - 357.

[31] Á. Császár, *Generalized open sets in generalized topologies*, Acta Math. Hungar., 106 (2005), 53-66.

[32] Á. Császár, *Weak structure*, Acta Math. Hungar. 131 (2011), no. 1-2, 193-195.

[33] T. Dalmonte, Ch. Grellois, N. Olivetti, *Towards intuitionistic non-normal modal logic and its calculi*, https://members.loria.fr/DGalmiche/files/=papers/EICNCL2018/EICNCL2018_paper_3.pdf.

[34] T. Dalmonte, Ch. Grellois, N. Olivetti, *Intuitionistic Non-Normal Modal Logics: A General Framework*, https://arxiv.org/pdf/1901.09812.pdf

[35] T. Dalmonte, N. Olivetti, S. Negri *Non-normal modal logics: bi-neighbourhood semantics and its calculi*, http://www.aiml.net/volumes/volume12/Dalmonte-Olivetti-Negri.pdf.

[36] S. Das, *Intuitionistic fuzzy topological spaces*, National Institute of Technology, Rourkela, https://core.ac.uk/download/pdf/53189688.pdf.

[37] J. M. Davoren, *Topological Semantics and Bisimulations for Intuitionistic Modal Logics and Their Classical Companion Logics*, Logical Foundations of Computer Science 2007, Springer 2007.

[38] J. M. Davoren, V. Coulthard, T. Moor, R. P. Goré, A. Nerode *On Intuitionistic Modal and Tense Logics and Their Classical Companion Logics: Topological Semantics and Bisimulations* , Annals of Pure and Applied Logic 161 (2009), pp. 349 - 367.

[39] J. M. Davoren, V. Coulthard, T. Moor, R. P. Goré, A. Nerode *Topological semantics for Intuitionistic modal logics and spatial discretisation by A/D maps*, in: Workshop on Intuitionistic Modal Logic and Applications (IMLA), Copenhagen, Denmark 2002.

[40] S. Dhanalakshmi, R. Malini Devi, *On generalized regular infra-closed sets*, International Journal of Mathematical Archive, 7 (8), 2016, pp. 33 - 36. *http://www.ijma.info/index.php/ijma/article/view/4385*

[41] J. P. Doignon, J. C. Falmagne, *Knowledge spaces and learning spaces*, https://arxiv.org/abs/1511.06757

[42] J. Fan, *Notes on neighborhood semantics for logics of unknown truths and false beliefs*, https://arxiv.org/pdf/2002.09622.pdf

[43] F. El Khoury, *Iris Biometric Model for Secured Network Access*, CRC Press, Taylor & Francis Group 2017, pp. 37 - 41.

[44] J. Gutierrez Garcia, S. E. Rodabaugh, *Order-theoretic, topological, categorical redundancies of interval-valued sets, grey sets, vague sets, interval-valued intuitionistic sets, intuitionistic fuzzy sets and topologies*, Fuzzy Sets and Systems, 156 (2005), pp. 445-484.

[45] M. Gerson, *An extension of S4 complete for neighborhood semantics but incomplete for the relational semantics*, Studia Logica 34, 333 - 342.

[46] M. Gerson, *The inadequacy of the neighbourhood semantics for modal logic*, Journal of Symbolic Logic 40, 141 - 148.

[47] A. Ghareeb, *Redundancy of multiset topological spaces*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 14, No. 4 (2017), pp. 163-168.

[48] D. R. Gilbert, G. Venturi, *Neighborhood semantics for logics of unknown truths and false beliefs*, The Australasian Journal of Logic, vol. 14, no 1 (2017).

[49] K. P. Girish, S. Jacob John, *Multiset topologies induced by multiset relations*, Information Sciences 188(0), pp. 298-313.

[50] K. P. Girish, S. Jacob John, *On multiset topologies*, Theory and Applications of Mathematics & Computer Science 2 (1) (2012) pp. 37-52.

[51] R. I. Goldblatt, *Grothendieck topology as geometric modality*, Mathematical Logic Quarterly, 27(31-35) (1981), pp. 495-529.

[52] M. C. C. Grácio, *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*, Tese de Doutorado em Filosofia. Campinas: UNICAMP/IFCH, 1999, http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/281056/1/Gracio_MariaClaudiaCabrini_D.pdf

[53] M. C. C. Grácio, H. de Araujo Feitosa, M. C. do Nascimento, *A propositional version of the logic of plausible*, https://www.researchgate.net/profile/Maria-Cabrini-Gracio/publication/266863334_A_PROPOSITIONAL_VERSION_OF_THE_LOGIC_OF_THE_PLAUSIBLE/links/5526616e0cf21e126f9d94a9/A-PROPOSITIONAL-VERSION-OF-THE-LOGIC-OF-THE-PLAUSIBLE.pdf.

[54] A. Gupta, R. Dev Sarma, *A note on some generalized closure and interior operators in a topological space*, Math. Appl. 6 (2017), 11-20.

[55] A. M. Hamza, *On the open limit point compactness and soft open limit point compactness*, Applied Mathematical Science, Vol. 11, 2017, no. 54, 2697-2706.

[56] Y. Hasimoto, *Finite model property for some intuitionistic modal logic*, Bulletin of the Section of Logic, Volume 30/2 (2001), pp. 87 - 89.

[57] G. Hari Siva Annam, J. Jasmine Elizabeth, *Cognition of nano binary topological spaces*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 15, No. 6 (2019), pp. 1045-1054.

[58] H. Z. Ibrahim, *On micro $T_{\frac{1}{2}}$ space*, International Journal of Applied Mathematics, vol. 33, no. 3, 2020, pp. 369-384, http://diogenes.bg/ijam/contents/2020-33-3/1/1.pdf.

[59] A. Indrzejczak, *Labelled tableau calculi for weak modal logics*, Bulletin of the Section of Logic, Volume 36: 3/4 (2007), pp. 159 - 171.

[60] S. Jacob John, P. Rajish Kumar, *On redundancy, separation and connectedness in multiset topological spaces*, AIMS Mathematics, 5(3): 2484-2499.

[61] R. Jamunarani, P. Jeyanthi, T. Noiri, *On generalized weak structures*, Journal of Algorithms and Computation 47 (2016), pp. 21 - 26.

[62] J. Järvinen, M. Kondo, J. Kortelainen, *Logics from Galois connections*, Internat. J. Approx. Reason., vol. 49, Issue 3, November 2008, pages 595 - 606.

[63] , *Topics in generalized topology and fuzzy generalized continuities*, https://core.ac.uk/download/pdf/90186371.pdf

[64] D. de Jongh, F. Sh. Maleki, *Two neighborhood semantics for subintuitionistic logics*, http://events.illc.uva.nl/Tbilisi/Tbilisi2017/uploaded_files/inlineitem/Dick_de_Jongh_Fateme_Shirmohammadzadeh_Maleki.pdf

[65] S. N. Jothi, P. Thangavelu, *Topology between two sets*, Journal of Mathematical Sciences & Computer Applications 1 (3): 95 - 107, 2011.

[66] S. N. Jothi, *Contribution to binary topological spaces*, Diss. Manonmaniam Sundaranar University, https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/133730.

[67] M. Burç Kandemir, B. Tanay, *On topological soft sets*, Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, vol. 16, issue 2.

[68] A. Kandil, O. A. E. Tantawy, M. Wafaie, *On flou (intuitionistic) topological spaces*, J. Fuzzy Math. 15 (2) (2007) 1-23.

[69] A. Kandil, S. A. El-Sheikh, M. M. Yakout, Shawqi A. Hazza, *Some types of compactness in double topological spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, vol. 10, no. 1 (July 2015), pp. 87 - 102.

[70] K. Kuratowski, *Sur l'operation $\overline{A}$ de l'analysis situs*, Fundamenta Mathematicae 3 (1922), 182-199, http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm3/fm3121.pdf.

[71] K. G. Rachchh, S. I. Ghanchi, *On Kasaj topological spaces*, Malaya Journal of Matematik, vol. 8, no. 4, 1766-1770, 2020.

[72] K. G. Rachchh, A. A. Soneji, S. I. Ghanchi, *On Kasaj generalized closed sets in Kasaj topological spaces*, Journal of Emerging Technologies and Innovative Research, vol. 7, issue 12, December 2020.

[73] J. C. Kelly, *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. 13 (1963) 71-89.

[74] K. A. Khan, *On the possibility of n-topological spaces*, International Journal of Mathematical Archive 3(7) 2012, pp. 2520-2523.

[75] Kim-Leon Lim, *A generalization of topological spaces*, Diss. University of British Columbia, 1964 https://open.library.ubc.ca/cIRcle/collections/ubctheses/831/items/1.0080589

[76] Y. K. Kim, W. K. Min, *σ-structures and quasi-enlarging operations*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 86, no. 5 (2013), 791-798.

[77] K. Kojima, *Relational and Neighborhood Semantics for Intuitionistic Modal Logic*, Reports on Mathematical Logic 47 (2012).

[78] E. Korczak-Kubiak, A. Loranty, R. J. Pawlak, *Baire generalized topological spaces, generalized metric spaces and infinite games*, Acta Math. Hungar. 140 (3) (2013), 203 - 231.

[79] P. Kremer, *Strong completeness of S4 for any dense-in-itself metric space*, The Review of Symbolic Logic, vol. 6, no. 3, 2013, http://individual.utoronto.ca/philipkremer/onlinepapers/strongcompleteness.pdf.

[80] A. Loranty, R. J. Pawlak, *The generalized entropy in the generalized topological spaces*, Topology and its Applications 159 (2012), 1734 - 1742.

[81] A. Loranty, R. J. Pawlak, *On the transitivity of multifunctions and density of orbits in generalized topological spaces*, Acta Math. Hungar. 135 (1-2) (2012), 56 - 66.

[82] S. Lugojan, *Generalized topology*, Stud. Cerc. Mat. 34, 348-360 (1982).

[83] M. Ma, K. Sano, *How tu update neighborhood models*, Journal of Logic and Computation, May 2015.

[84] H. Maki, *On generalizing semi-open and preopen sets*, Report for Meetingon Topological Spaces and its Applications, Yatsushiro College of Technology, (1996), 13-18.
[85] H. Maki, J. Umehara, T. Noiri, *Every topological space is pre-*$T\frac{1}{2}$, Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ. Ser. A Math., 17 (1996), 33-42.
[86] A. S. Masshour, A. A. Allam, F. S. Mahmoud, F. H. Khedr, *On supratopological spaces*, Indian J. Pure Appl. Math, 14(4): 502 - 510, April 1983.
[87] J. McKinsey, A. Tarski, *On closed elements in closure algebras*, Annals of Mathematics, 47, 122-162, 1946.
[88] J. McKinsey, A. Tarski, *The algebra of topology*, Annals of Mathematics 45 (1944), 141-191.
[89] D. Molodtsov, *Soft set theory - first results*, Computers and Mathematics with Applications 37 (1999), 19-31.
[90] M. Moniri, F. S. Maleki, *Neighborhood semantics for basic and intuitionistic logic*, Logic and Logical Philosophy, Volume 23 (2015), 339-355.
[91] G. E. Moore, *The New Haven Mathematical Colloquium*, Ed. Eliakim Hasting Moore, Ernest Julius Wilczynski, Max Mason, Yale University Press, 1910.
[92] A. Mukherjee, S. Bhattacharya Halder *Fuzzy set and fuzzy topology*, Alpha Science International, 2015.
[93] J. M. Mustafa, *On binary generalized topological spaces*, General Letters in Mathematics Vol. 2, No. 3, June 2017, pp. 111-116.
[94] T. Noiri, V. Popa, *The unified theory of certain types of generalizations of Lindelof spaces*, Demonstratio Mathematica, vol. XLIII, no. 1, 2010.
[95] T. Noiri, A. Al-Omari, *On* Ψ_**-operator in ideal m-spaces*, Bol. Soc. Paran. Mat. vol. 30(1) (2012), 53-66.
[96] T. Noiri, S. Modak, *A note on mathematical structures*, Bol. Soc. Paran. Mat. vol. 37(1) (2019), 63-69.
[97] A. M. Al-Odhari, *On infra-topological spaces*, International Journal of Mathematical Archive 6 (11), 2015, pp. 179-184.
[98] A. M. Al-Odhari, *I-continuous functions and I*-continuous functions on infra topological spaces*, International Journal of Mathematical Archive 7 (3), March 2016, pp. 18 - 22. https://www.researchgate.net/publication/312902605_I_-_CONTINUOUS_-FUNCTIONS_AND_i_ii_i_-C_CONTINUOUS_-FUNCTIONS_ON_INFRA_TOPOLOGICAL_SPACES
[99] Z. Ognjanović, M. Rasković, Z. Marković, *Probability logics: probability-based formalization of uncertain reasoning*, Springer 2016.
[100] H. Ono, *On Some Intuitionistic Modal Logics*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1977), 687 - 722.
[101] E. Pacuit, *Neighborhood Semantics for Modal Logic*, Springer International Publishing AG 2017.
[102] S. Palaniammal, M. Murugalingam, *Generalized filters*, International Mathematical Forum, Vol. 9, 2014, no. 36, http://www.m-hikari.com/imf/imf-2014/33-36-2014/palaniammalIMF33-36-2014.pdf.
[103] A. Palmigiano, M. Ma, M. Sadrzadeh, *Algebraic Semantics and Model Completeness for Intuitionistic Public Announcement Logic*, Annals of Pure and Applied Logic 165 (2014), 963 - 995.
[104] A. Palmigiano, S. Sourabh, Z. Zhao, *Sahlqvist theory for impossible worlds*, https://arxiv.org/pdf/1603.08202.pdf
[105] R. Usha Parameswari, P. Thangavelu, *On* $b^{\#}$*-Open sets*, International Journal of Mathematics Trends and Technology, vol. 5, no. 3, January 2014.
[106] S. Pavulin Rani, M. Trinita Pricilla, *Generalized b-closed sets in vague topological spaces*, http://www.allresearchjournal.com/archives/2017/vol3issue7/PartH/3-7-45-482.pdf
[107] D. Peleg, *A generalized closure and complement phenomenon*, Discrete Mathematics 50 (1984), pp. 285-293.
[108] A. Piękosz, *Generalizations of topological spaces*, https://www.researchgate.net/publication/314392123_Generalizations_of_Topological_Spaces.
[109] G. D. Plotkin, C. P. Stirling *A framework for intuitionistic modal logic*, in: J. Y. Halpern, editor, *Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge*, 1986.
[110] M. Porębska, W. Suchoń, *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*, PWN 1991.
[111] P. L. Powar, Pratibha Dubey, *A concise form of continuity in fine topological space*, Advances in Computational Sciences and Technology, Vol. 10, no. 6 (2017), pp. 1785 - 1805.
[112] P. L. Powar, K. Rajak, *Fine-irresolute mappings*, Journal of Advanced Studies in Topology, vol. 3, no. 4, 2012, pp. 125-139.
[113] M. Przemski, *A decomposition of continuity and* α*-continuity*, Acta Math. Hungar., 61 (1-2) (1993), 93-98.

[114] J. Puiwong, Ch. Viriyapong, J. Khampakdee *Weak separation axioms in bi-weak structure spaces*, Burapha Science Journal, vol. 22, no. 2 (2017), http://science.buu.ac.th/ojs246/index.php/sci/article/view/1363/1369.

[115] G. Restall, *Subintuitionistic Logics*, Notre Dame J. Formal Logic, Vol. 35, Number 1 (1994), 116 - 129.

[116] Quang Vu Bui, *Pretopology and Topic Modeling for Complex Systems Analysis: Application on Document Classification and Complex Network Analysis. Modeling and Simulation*, PSL Research University, 2018, https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02147578/document

[117] G. Sambin, *Pretopologies and completeness proofs*, https://www.math.unipd.it/~sambin/txt/pretopcomp.pdf

[118] R. D. Sarma, *On convergence in generalized topology*, International Journal of Pure and Applied Mathematics 60(2), January 2010, https://www.researchgate.net/publication/267466381_On_convergence_in_generalized_topology

[119] M. S. Sarsak, *New separation axioms in generalized topological spaces*, Acta Math. Hungar., 132 (3) (2011), 244 - 252.

[120] R. Seethalakshmi, M. Kamaraj, *Combinatorial properties and n-ary topology on product of power sets*, International Journal of New Innovations in Engineering and Technology, vol. 9, issue 3, December 2018.

[121] M. Shabir, M. Naz, *On soft topological spaces*, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011), pp. 1786-1799, https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/classes/sc_2015/plagiarism/shabir.pdf.

[122] M. Singha, *On different topology-like structures*, https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/39310.

[123] A. Simpson, *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, PhD Thesis at the University of Edinburgh (1994), homepages.inf.ed.ac.uk/als/Research/thesis.pdf.

[124] H. Soldano, *A modal view on abstract learning and reasoning*, Ninth Symposium on Abstraction, Reformulation, and Approximation, SARA 2011, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.189.2748&rep=rep1&type=pdf

[125] V. H. Sotirov, *Modal theories with intuitionistic logic*, w: *Proceedings of the Conference on Mathematical Logic*, Sofia 1980, p. 139 - 171. Bulgarian Academy of Sciences, 1984.

[126] T. Speer, *A short study of Alexandroff spaces*, https://arxiv.org/pdf/0708.2136.pdf.

[127] F. G. Shi, B. Pang, *A note on soft topological spaces*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, vol. 12, no. 5 (2015), pp. 149-155.

[128] A. Száz, *Structures derivable from relators*, Singularité 3(8)(1992), 14-30.

[129] A. Száz, *Minimal structures, generalized topologies and ascending systems should not be studied without generalized uniformities*, Filomat 21:1 (2007), 87-97.

[130] Ch. Steinsvold, *Being wrong: Logics for False Belief*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 52, no. 3, 2011.

[131] Gh. Abbaspour Tabadkan, A. Taghavi, *A Note on Generalized Topology*, International Mathematical Forum, Vol. 6, 2011, no. 1, 19-24.

[132] M. Takano, *Finite Model Property for an Intuitionistic Modal Logic*, Nihonkai Math. J. 14 (2003), no. 2, 125–132.

[133] O. A. E. Tantawy, S. A. El-Sheikh, S. Hussien, *Topology of soft double sets*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Vol. 12, No. 5, (Nov. 2016), pp. 641-657.

[134] M. L. Thivagar, C. Richard, *On nano forms of weakly open sets*, International Journal of Mathematics and Statistics Invention, volume 1, Issue 1, August 2013, pp. 31-37.

[135] M. L. Thivagar, V. Ramesh, M. A. Dasan, *On new structure of N-topology*, Cogent Mathematics (2016), 3.

[136] M. L. Thivagar, R. Carmel, N. R. Paul, *Mathematical innovations of a modern topology in medical events*, International Journal of Information Science 2012, 2(4): 33-36.

[137] M. L. Thivagar, J. Kavitha, *On binary structure of supra topological spaces*, Bol. Soc. Paran. Mat, vol. 35, 3 (2017): 25 - 37.

[138] K. Vaiyomathi, F. Nirmala Irudayam, *Infra generalized b-closed sets in infra-topological space*, International Journal of Mathematics Trends and Technology, Vol. 47, No. 1, July 2017. http://www.ijmttjournal.org/2017/Volume-47/number-1/IJMTT-V47P508.pdf

[139] A. Visser, *Uniform interpolation and layered bisimulation*, Lecture Notes in Logic, volume 6, 1996, 139 - 164.

[140] J. Vosmaer, *A new version of an old modal incompleteness theorem*, Bulletin of the Section of Logic, vol. 39:3/4 (2010), pp. 199-204.

[141] T. Witczak, *A note on the intuitionistic logic of false belief*, https://arxiv.org/pdf/2012.08309.pdf.

[142] T. Witczak, *Generalized topologies with associating function and logical applications*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, Vol. 24, Number 2, December 2020.

[143] T. Witczak, *Infra-topologies revisited: logic and clarification of basic notions*, https://arxiv.org/pdf/2012.03558.pdf

[144] T. Witczak, *Intuitionistic Modal Logic Based on Neighborhood Semantics Without Superset Axiom*, https://arxiv.org/pdf/1707.03859.pdf.

[145] T. Witczak, *Negotiation sets: a general framework*, https://arxiv.org/pdf/2102.04982.pdf.

[146] T. Witczak, *Propositional logic with probability operators (based on general ideas of weak modal calculus)*, w: *Reasoning: games, cognition, logic*, red. M. Urbański, T. Skura, P. Łupkowski, w serii *Studies in Logic*, vol. 83, College Publications 2020.

[147] T. Witczak, *Simple example of weak modal logic based on intuitionistic core*, https://arxiv.org/pdf/1806.09443.pdf.

[148] T. Witczak, *Topological and multi-topological frames in the context of intuitionistic modal logic*, Bulletin of the Section of Logic, vol. 48, no. 3 (2019), https://czasopisma.uni.lodz.pl/bulletin/article/view/6205/5833.

[149] F. J. O. Al-Ysaary, *On ms-convergence of nets and filters*, Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics, vol. 9, issue 2, Autumn 2017, 17-25.

[150] M. R. Ahmadi Zand, R. Khayyeri, *Two separation axioms in Generalized Topological Spaces*, The 45th Annual Iranian Mathematics Conference, August 26-29 2014.

[151] Yang Zhimin, Tian Zukai, *Grey topological space*, Busefal no. 39 (1989), pp. 9-15.

[152] E. Żabski, *Logiki nihilistyczne, czyli teorie prawd "powierzchownych" i "głębokich"*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 2001.